

УДК 517.518

В.С. Гулиев, П.И. Лизоркин

Классы голоморфных и гармонических функций в поликруге в связи с их граничными значениями

Введение

Классы Харди голоморфных и гармонических в круге $U \subset \mathbb{C}$ функций детально и с различных точек зрения изучены в анализе. Большое внимание исследователи уделяли также классам Бергмана–Джрбашяна в U (см. обзор [1]). Один из аспектов этой деятельности связан с изучением граничных свойств функций указанных классов. Этот аспект естественно вызвал интерес к гладкостным аналогам классов Харди и Бергмана–Джрбашяна. Мы имеем в виду классы $H_p^*(U)$ и $A_p^*(U, \beta)$ голоморфных функций $w(z)$, $z \in U$, для которых соответственно

$$\sup_r \left\{ \int_0^{2\pi} |w^{(s)}(re^{it})|^p dt \right\}^{1/p} < \infty, \quad z = re^{it},$$

$$\left\{ \int_U |w^{(s)}(z)|^p (1 - |z|)^{\beta-1} dx dy \right\} < \infty, \quad z = x + iy.$$

Подобные классы изучались и в случае поликруга $U^n \subset \mathbb{C}^n$.

В данной статье вводятся два семейства пространств ($\mathcal{B}$ -пространства и $\mathcal{L}$ -пространства), которые при частных значениях параметров, входящих в их определение, совпадают либо с классами $H_p^*(U)$, либо с классами $A_p^*(U, \beta)$. Идея состоит в раздельном учете радиальных и угловых свойств функций $w(re^{it})$. Рассматривается случай поликруга $U^n \subset \mathbb{C}^n$ при $n \geq 1$. В первую очередь нас интересует исчерпывающая характеристика граничных свойств функций $\mathcal{B}$ - и $\mathcal{L}$ -пространств на остоле U^n (т.е. на торе T^n).

Наряду с унификацией, которая возникает при излагаемом подходе, можно отметить следующие моменты. Наши результаты имеют характер необходимых и достаточных условий, связывающих голоморфные функции в поликруге U^n с их граничными значениями на остоле U^n (т.е. на торе T^n). При разумных ограничениях на параметры p, q мы даем описание граничных значений в простейших терминах

гармонического анализа на T^n . Применяемая методика является новой и представляет самостоятельный интерес. Она основана на оценках, так или иначе связанных с ядром Пуассона, на использовании теории мультипликаторов, а также на технике максимальных неравенств.

В конце данной работы мы обсуждаем ряд утверждений для гармонических в U^n функций (см. разд.4). Их развернутое изложение, а также перенесение упомянутых результатов на голоморфные и гармонические векторнозначные функции будут даны в последующей работе авторов (часть II). Там же будут рассмотрены теоремы вложения и компактности, вопросы интерполяции и аппроксимации.

Перечисленные результаты в усложненной форме допускают перенесение на $\mathcal{B}$ - и $\mathcal{L}$ -пространства с нестепенными весами (как показано в части II).

Краткое изложение полученных результатов в случае диска U дано нами в заметке [2].

1. Некоторые определения и вспомогательные сведения.

Основные результаты

Пусть $\mathbb{C}^n$ — n -мерное комплексное пространство точек $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z_j = x_j + iy_j$. Через U^n обозначим область в $\mathbb{C}^n$:

$$U^n = \{z \in \mathbb{C}^n; |z_j| = \sqrt{x_j^2 + y_j^2} < 1, j = 1, \dots, n\},$$

именуемую в дальнейшем поликругом или полидиском. Совокупность голоморфных в U^n функций обозначим символом $\mathcal{O}(U^n)$. Голоморфная в U^n функция $w(z) = w(z_1, \dots, z_n)$ изображается степенным рядом

$$w(z) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} C_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} C_k z^k. \quad (1.1)$$

В последнем выражении использованы компактные обозначения: $k = (k_1, \dots, k_n)$,

$\mathbb{N}^n = \overbrace{\mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}^n$, $z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$.¹ Напомним, что коль скоро $k! = k_1! \dots k_n!$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, то

$$k! C_k = D^k w(z)|_{z=0} = \frac{\partial^{|k|} w(z)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} \Big|_{z=0}. \quad (1.2)$$

Пусть T^n — "остов" U^n . Это n -мерный тор:

$$T^n = \{\zeta \in \mathbb{C}^n, |\zeta_k| = 1, k = 1, \dots, n\},$$

¹ $\mathbb{Z}$ — целые числа, $\mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N}_+$ — натуральные, $\mathbb{N} = \mathbb{N}_+ \cup \{0\}$

т.е. совокупность точек $\zeta = (e^{it_1}, \dots, e^{it_n})$, $t = (t_1, \dots, t_n)$. В статье существенно используется тот факт, что и T^n , и U^n представляются в виде прямого произведения

$$U^n = U \times \dots \times U, \quad T^n = T \times \dots \times T, \quad T = \partial U,$$

где U, T — одномерный диск и тор соответственно.

Свойства голоморфной в U^n функции w полностью определяются ее свойствами на "подостове" T^n

$$T^n = \{z \in \mathbb{C}^n, z = r\zeta, \zeta \in T^n, 0 \leq r < 1\}.$$

Поскольку подостов представляется в виде прямого произведения

$$T^n = T^n \times [0, 1),$$

мы получаем возможность характеризовать различные классы голоморфных функций с помощью их радиальных (т.е. относительно переменной r) и/либо тангенциальных (т.е. относительно переменных $t_1, \dots, t_n$) свойств. Это особенно полезно при рассмотрении n -гармонических функций в U^n (см. разд.4). В голоморфном случае целесообразно прибегнуть к оператору $\mathcal{R}$, перемешивающему радиальные и тангенциальные свойства и действующему по формуле

$$\mathcal{R}w = \sum_{k=1}^n z_k \frac{\partial w}{\partial z_k}. \quad (1.3)$$

Его роль и значение определяются тем, что он порождает простое мультипликаторное преобразование ряда (1.1)

$$\mathcal{R}^s w(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}_+^n} |k|^s C_k z^k, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

С помощью оператора $\mathcal{R}$ (точнее, его сужения на T^n) вводятся определения голоморфных B -пространств $B_{p,q}^{\alpha+}(U^n)$ и голоморфных $\mathcal{L}$ -пространств $\mathcal{L}_{p,q}^{\alpha+}(U^n)$. Считая $s \in \mathbb{N}_+$, $0 \leq \alpha < s$, положим при $1 \leq p < \infty$ и $q = \infty$ соответственно

$$B_{p,q}^{\alpha+}(U^n) = \left\{ w \in \mathcal{O}(U^n); \left(\int_0^1 (1-r)^{(s-\alpha)q-1} \|\mathcal{R}^s w\|_p^q r^n dr \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

$$B_{p,\infty}^{\alpha+}(U^n) = \left\{ w \in \mathcal{O}(U^n); \sup_{r < 1} (1-r)^{s-\alpha} \|\mathcal{R}^s w\|_p < \infty \right\}. \quad (1.5)$$

В (1.5) и далее $\|\cdot\|_p \equiv \|\cdot\|_{L_p} \equiv \|\cdot\|_{L_p(T^n)}$ обозначает L_p -норму на торе T^n , т.е.

$$\|\mathcal{R}^s w\|_p \equiv \|\mathcal{R}^s w(r \cdot)\|_{L_p(T^n)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \int_{T^n} |(\mathcal{R}^s w)(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

где $d\sigma(\zeta)$ — стандартная лебегова мера на T^n (при $p = \infty$ имеется в виду обычная модификация). Норма $|w, B_{p,q}^{\alpha+}|$ функции w в $B_{p,q}^{\alpha+}(U^n)$ складывается из написанной в фигурных скобках (1.5) полунормы (обозначим ее через $b_{p,q}^{\alpha+}(w)$) и $|w(0)|$, т.е.

$$|w, B_{p,q}^{\alpha+}| = |w(0)| + b_{p,q}^{\alpha+}(w). \quad (1.6)$$

Норма эта несущественно (с точностью до эквивалентности) зависит от выбора s и превращает $B_{p,q}^{\alpha+}(U^n)$ в банахово пространство.

Аналогично пространства $\mathcal{L}_{p,q}^{\alpha+}(U^n)$ определяются при $s \in \mathbb{N}_+$, $\alpha < s$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ соотношениями

$$\mathcal{L}_{p,q}^{\alpha+}(U^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \mathcal{O}(U^n), l_{p,q}^{\alpha+}(w) < \infty\},$$

где при $1 \leq q < \infty$ и $q = \infty$ соответственно

$$l_{p,q}^{\alpha+}(w) = \left\| \left(\int_0^1 (1-r)^{(s-\alpha)q-1} |\mathcal{R}^s w(r\zeta)|^q r^n dr \right)^{1/q} \right\|_{L_p(T^n)},$$

$$l_{p,q}^{\alpha+}(w) = \left\| \sup_{0 \leq r < 1} (1-r)^{s-\alpha} |\mathcal{R}^s w(r\zeta)| \right\|_{L_p(T^n)}.$$

Нормировка

$$|w, \mathcal{L}_{p,q}^{\alpha+}| = |w(0)| + l_{p,q}^{\alpha+}(w) \quad (1.7)$$

превращает $\mathcal{L}_{p,q}^{\alpha+}$ в полное нормированное пространство.

Для формулировки результатов напомним определение пространств периодических функций $B_{p,q}^{\alpha}(T^n)$ и $L_{p,q}^{\alpha}(T^n)$, которые мы будем рассматривать как функции, заданные на остоле U^n . Отметим, что пространства $B_{p,q}^{\alpha}(T^n)$ обычно именуются пространствами Никольского–Бесова, а пространства $L_{p,q}^{\alpha}(T^n)$ — пространствами Лизоркина–Трибеля. Последние часто обозначаются символом $F_{p,q}^{\alpha}(T^n)$ (см., например, [3]), мы следуем обозначениям [4].

Пусть Q_N — "дискретный куб" в $\mathbb{Z}^n$, т.е. совокупность мультииндексов

$$Q_N = \{k, k \in \mathbb{Z}^n, |k_j| < N, j = 1, \dots, n\}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Через χ_A обозначим характеристическую функцию множества $A \subset \mathbb{Z}$. Множество $K_m = \overset{m}{Q} \setminus \overset{m-1}{Q}$ (где $\overset{m}{Q} = Q_{2^m}$) назовем коридором. Если функция $f(t)$, $t \in T^n$, разложена в ряд Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k e^{ikt} \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(k) e^{ikt}, \quad (1.8)$$

$$f_m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(K_m) C_k e^{ikt}$$

назовем пачкой f по коридору K_m , $m = 1, 2, \dots$. Положим еще $f_0(t) = C_0$. Декомпозицией f по коридорам назовем представление f слабо сходящимся рядом

$$f(t) \overset{D'}{=} \sum_{m=0}^{\infty} f_m(t).$$

Через D , D' обозначается пространство основных и обобщенных функций на T^n с соответствующими топологиями.

Положим по определению при $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$,

$$B_{p,q}^{\alpha}(T^n) = \left\{ f \in D', \left[\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m\alpha q} \|f_m\|_p^q \right]^{1/q} < \infty \right\}, \quad (1.9)$$

$$L_{p,q}^{\alpha}(T^n) = \left\{ f \in D', \left\| \left[\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m\alpha q} |f_m(t)|^q \right]^{1/q} \right\|_p < \infty \right\}. \quad (1.10)$$

Выражения, конечность которых оговорена в (1.9) и (1.10), объявляются нормами в $B_{p,q}^{\alpha}(T^n)$ и $L_{p,q}^{\alpha}(T^n)$, а обозначаются через $|f, B_{p,q}^{\alpha}|$ и $|f, L_{p,q}^{\alpha}|$ соответственно. Соответствующие полунормы (в которых отсутствует f_0) будем обозначать через $b_{p,q}^{\alpha}(f)$ и $l_{p,q}^{\alpha}(f)$ (b и l — прямые).

Назовем спектром $f \in D'$ совокупность $k \in \mathbb{Z}^n$, для которых $\tilde{f}(k) \neq 0$ в (1.8). Граничное значение функции $w(z) \in \mathcal{O}(U^n)$ на остоле T^n будем понимать как предел $\lim_{r \rightarrow 1} w(re^{it_1}, \dots, re^{it_n}) = f(t)$ в смысле слабой сходимости.

Одним из основных результатов статьи является

Теорема А. Для того чтобы голоморфная функция $w(z)$ принадлежала пространству $B_{p,q}^{\alpha}(U^n)$ ($L_{p,q}^{\alpha}(U^n)$), необходимо и достаточно, чтобы ее граничное значение имело спектр в $\mathbb{N}^n$ и принадлежало $B_{p,q}^{\alpha}(T^n)$ ($L_{p,q}^{\alpha}(T^n)$).

Аналогичная теорема справедлива для n -гармонических функций (см. разд. 4).

Приведем теперь в нужной нам форме некоторые факты, на которые будем опираться в дальнейшем.

Теорема I (о диагональном p -мультипликаторе для l_q -значных функций). Пусть $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ и $T(x) = \{T_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — последовательность ограниченных функций, каждая из которых представляется в виде

$$T_j(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} d\tau_j(\xi), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где τ_j — конечные меры равномерно ограниченной вариации, т.е.

$$\text{var } \tau_j = \int_{R^n} |d\tau_j| \leq C_T < \infty, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть к тому же функции $T_j(x)$ непрерывны в точках $k \in \mathbb{Z}$. Тогда справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} T_j(k) \tilde{f}_j(k) e^{i k t}; L_p(l_q) \right| \leq C C_T |\{f_j\}, L_p(l_q)|, \quad (1.11)$$

где $\tilde{f}_j(k)$ — коэффициенты Фурье f_j и C не зависит от f и T .

П о я с н е н и е. В (1.11) $\{f_j\} = \{f_j(t)\} = f(t)$ — векторнозначная функция, принадлежащая пространству $L_p(T^n, l_q) \equiv L_p(l_q)$. Это означает, что $f(t) \in l_q$ почти при каждом $t \in T^n$ и при этом

$$|f, L_p(l_q)|^p \stackrel{\text{def}}{=} \int_{T^n} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(t)|^q \right\}^{p/q} dt < \infty.$$

Преобразование Фурье $\mathcal{F}$ (и его обращение $\mathcal{F}^{-1}$) действует на f покомпонентно, т.е.

$$\mathcal{F}f = \{\mathcal{F}f_j\}_0^\infty \equiv \{\tilde{f}_j\}_0^\infty,$$

при этом (если положить $f_j = g$)

$$\mathcal{F}g = \{\tilde{g}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n}, \quad \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{g}(k)\} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tilde{g}(k) e^{i k t} = g(t).$$

Поэтому величину слева в (1.11) можно записать как $|Af, L_p(l_q)|$, где $Af = \mathcal{F}^{-1}T\mathcal{F}f$ и T рассматривается как диагональная матрица с элементами T_j на главной диагонали. Само неравенство (1.11) перепишется при этом в компактной форме как условие ограниченности A в $L_p(l_q)$:

$$|Af, L_p(l_q)| \leq C |f, L_p(l_q)|. \quad (1.11')$$

Утверждение типа теоремы I получено впервые в работе [5] для пространств $L_p(R^n, l_q)$. На периодический случай оно перенесено в [3].

З а м е ч а н и е 1.1. Отметим, что в случае, когда все компоненты $\{f_j\}$, кроме f_0 , тождественно обращаются в нуль, теорема I превращается в простейший мультипликаторный признак для скалярнозначной функции. Более того, с учетом теоремы Литтлвуда–Пэли (о перенормировке пространств L_p в терминах диадических пачек) она приводит к знаменитому признаку Марцинкевича (см. замечание 2.5).

Мы будем пользоваться обобщением векторнозначного максимального неравенства Рубио де Франсиа на кратные ряды Фурье. Для функции $f = \{f_j\}_0^\infty \in L_p(T^n, l_q)$ положим

$$(S * f)(t) = \{(S^* f_j)(t)\}_0^\infty,$$

где $(S^*g)(t)$ — мажоранта частных сумм скалярнозначной функции g по кубам $Q_N = \{k \in \mathbb{Z}^n, |k_j| < N, j = 1, \dots, n\}$:

$$S_N g(x) = \sum_{k \in Q_N} \tilde{g}(k) e^{ikx}, \quad (S^*g)(x) = \sup_{N+} |S_N g(x)|.$$

Теорема II. При $1 < p, q < \infty$ справедливо неравенство

$$\left\| \left\{ \sum |S^+ f_j|^q \right\}^{1/q} \right\|_{L_p(T^n)} \leq C \left\| \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^q \right\}^{1/q} \right\|_{L_p(T^n)}, \quad (1.12)$$

где постоянная C не зависит от f .

Теорема II при $n = 1$ доказана в [6], при произвольном n — в [7]. Она утверждает, как видно, ограниченность оператора S^* в $L_p(T^n, l_q)$: $|S^* f, L_p(l_q)| \leq C |f, L_p(l_q)|$.

Будут привлекаться также оценки максимальной функции типа Харди–Литтлвуда для функций $f \in L_p(l_q)$, которые удобнее прокомментировать по ходу дела (см. разд. 2). Там же будут указаны некоторые предложения, являющиеся следствиями теоремы о мультипликаторах, но имеющие самостоятельный интерес (неравенство типа Бернштейна и типа Фавара).

2. Вспомогательные предложения

В данном разделе рассматриваются оценки, так или иначе связанные с ядром Пуассона. Подраздел 2.1 посвящен одномерному случаю, 2.2 — многомерному.

2.1. Остаток ряда Тейлора и связанные с ним оценки (одномерный случай)

Метод "рассекающей декомпозиции", который мы использовали при определении пространств $B_{p,q}^\alpha(T^n)$ и $L_{p,q}^\alpha(T^n)$ (см. разд. 1), приводит к необходимости рассечения ряда Тейлора голоморфной в U функцией $w(z)$ на пакки $w_m(z)$:

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(z) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(z), \quad (2.1)$$

где $w_0(z) = C_0$,

$$w_m(z) = \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} C_k z^k, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Нам потребуются оценки $w_m(z) = w_m(re^{it})$ через граничную функцию

$$\lim_{r \rightarrow 1} w_m(re^{it}) = w_m(e^{it}) = f_m(t). \quad (2.3)$$

Несколько обобщая ситуацию, рассмотрим голоморфную функцию $g(z)$, имеющую нуль порядка l при $z = 0$. Пусть $(Mh)(t)$ — максимальная функция Харди-Литтлвуда, т.е.

$$(Mh)(t) = \sup_{0 < \delta < \pi} \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} |f(t + \tau)| d\tau.$$

Предложение 2.1. Пусть функция $g \in O(U)$ имеет на ∂U суммируемое граничное значение $g(e^{it}) = h(t)$ и разлагается в ряд

$$g(z) = \sum_{k=l}^{\infty} C_k z^k, \quad l \geq 0. \quad (2.4)$$

Тогда справедливы оценки

$$|g(re^{it})| \leq Cr^l (Mh)(t), \quad (2.5)$$

$$\|g(re^{it})\|_{L_p(T)} \leq r^l \|h\|_{L_p(T)}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (2.6)$$

Замечание 2.1. При $p > 1$ вторая оценка есть по существу следствие первой; однако независимое ее доказательство дает лучшую константу (равную 1).

Доказательство. Напомним, что если $P_r(t) = P(re^{it})$ есть ядро Дирихле

$$P_r(t) = \frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2},$$

то функция $g(z)$ восстанавливается по граничным значениям $h(t)$ по формуле (см., например, [9])

$$g(re^{it}) = \frac{1}{\pi} \int_T P_r(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Перепишем (2.4) в виде

$$g(z) = z^l \frac{\sum_{k=l}^{\infty} C_k z^k}{z^l}. \quad (2.7)$$

Дробь в (2.7) есть аналитическая в U функция и в силу сказанного восстанавливается по своим граничным значениям $e^{-ilt} h(t)$. Таким образом,

$$|g(z)| = r^l \left| \frac{1}{\pi} \int_T P_r(t - \tau) e^{-il\tau} h(\tau) d\tau \right|. \quad (2.8)$$

Возьмем L_p -норму от обеих частей равенств и справа применим неравенство Юнга для сверток. Получим

$$\left\{ \int |g(re^{it})|^p dt \right\}^{1/p} \leq r^l \frac{1}{\pi} \|P_r\|_{L_1(T)} \|h\|_{L_p(T)},$$

что в силу свойств ядра Пуассона совпадает с (2.6).

Неравенство (2.5) хорошо известно при $l = 0$ [9] (см. также [8]). При $l > 0$ оно немедленно следует из соотношения (2.8), поскольку домножение $h(t)$ на e^{-ilt} не меняет максимальной функции

$$(Mh)(t) = (Mh_1)(t), \quad h_1(t) = e^{-ilt}h(t).$$

Предложение 2.1 доказано. Из него получаем

С л е д с т в и е 2.1. *Имеют место неравенства*

$$|w_m(re^{it})| \leq Cr^{2^{m-1}}(Mf_m)(t). \quad (2.9)$$

$$\|w_m(re^{it})\|_{L_p(T)} \leq r^{2^{m-1}}\|f_m(\cdot)\|_{L_p(T)}. \quad (2.10)$$

Впоследствии мы часто применяем теорему о мультипликаторах и ее скалярный вариант (см. замечание 1.1), не производя стандартных выкладок. Чтобы дать представление о соответствующей технике, докажем с помощью теоремы I неравенство типа Бернштейна.

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Пусть l_q -значная функция $g(t) = \{g^j(t)\}_0^\infty$ принадлежит пространству $L_p(T, l_q)$ и ее преобразование Фурье $\tilde{g}(t)$ имеет спектр в $[-l, l]$ (т.е. каждая компонента $g^j(t)$ является многочленом вида $\sum_{|k| \leq l} C_k^j e^{ikt}$). Тогда*

справедливо неравенство

$$|g^{(s)}, L_p(l_q)| \leq Cl^s |g, L_p(l_q)|,$$

где $g^{(s)}(t) = \frac{d^s g(t)}{dt^s}$ и C не зависит от l .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Производная $g^{(s)}(t)$ есть вектор-функция с компонентами

$$(g^j)^{(s)} = \sum_{|k| < l} C_k^j (ik)^s e^{ikt}.$$

Таким образом, здесь в качестве мультипликатора выступает функция

$$T_j(\tau) = \begin{cases} (i\tau)^s, & |\tau| \leq l, \\ 0, & |\tau| > l. \end{cases}$$

Она ограничена числом l^s , ее вариация $\leq 2l^s$. По теореме I отсюда следует сформулированное утверждение.

Аналогично доказывается неравенство типа Бора, дающее оценку интеграла от периодической вектор-функции со спектром вне $(-l, l)$.

Неравенства типа Бернштейна и типа Бора, связанные со степенями оператора Лапласа на l_q -значных функциях, полезны на многомерном торе (в рамках R^n они рассмотрены в [10]). Неравенство (2.6) имеет в какой-то мере промежуточный характер между неравенствами Бора и Фавара.

З а м е ч а н и е 2.2. Благодаря неравенству типа Бернштейна операция $\left(z \frac{d}{dz}\right)^s$ легко обрабатывается методом мультипликаторов (поскольку для $w \in \mathcal{O}(U)$ она сводится к мультипликатору $\{k^s\}_0^\infty$). В случае гармонических в U функций аналогичными свойствами обладает операция $\left(\frac{\partial}{\partial r} r\right)^s$, которая сводится к мультипликатору $\{(1+|k|)^s\}_\infty^\infty$ и имеет удобное сверточное выражение для всех вещественных s . На многомерном торе T^n аналогами указанных операторов могут служить операторы

$$\left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + z_n \frac{\partial}{\partial z_n}\right)^s, \quad \left(\frac{\partial}{\partial r_1} r_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial r_n} r_n\right)^s$$

(действуя на голоморфные, соответственно n -гармонические функции в U^n , они порождают удобное мультипликативное преобразование на T^n).

2.2. Многомерный случай

Рассмотрим голоморфную в U^n функцию $g(z) = g(z_1, \dots, z_n)$, имеющую разложение

$$g(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} C_k z^k \equiv \sum_{k \in \mathbb{N}^n \setminus Q_1} C_k z^k,$$

коэффициенты которого обращаются в нуль при $k \in Q_1$. Верно соотношение

$$g(z) = \sum_{j=1}^n g^j - (n-1)g^\#(z), \quad (2.11)$$

где при $|k| \equiv |k|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq j \leq n} k_j$

$$g^j(z) = \sum_{|k_j| > l} C_k z^k, \quad g^\#(z) = \sum_{|k| > l} C_k e^{ik\alpha}.$$

В этих условиях можно написать произведения

$$g^j(z) = z_j^l \frac{g^j(z)}{z_j^l}, \quad g^\#(z) = \prod_{j=1}^n z_j^l \frac{g^\#(z)}{\prod_{j=1}^n z_j^l},$$

в которых множители-дроби остаются аналитическими в U^n функциями. Если функция $g(z)$ имеет на остоле U^n суммируемое граничное значение $h(t) = h(t_1, \dots, t_n)$, то указанные множители-дроби восстанавливаются по своим граничным значениям, т.е.

$$g^j(z) = z_j^l \frac{1}{\pi^n} \int_{T^n} P_{(r)}(t - \tau) \frac{h(\tau)}{e^{il\tau}} d\tau,$$

$$g^\#(z) = \prod_{j=1}^n z_j^l \frac{1}{\pi^n} \int_{T^n} P_{(r)}(t - \tau) e^{-il(\tau_1 + \dots + \tau_n)} h(\tau) d\tau.$$

Здесь $P_{(r)}(t) = P_{(r_1, \dots, r_n)}(t_1, \dots, t_n)$ — ядро Пуассона на T^n :

$$P_{(r)}(t) = \prod_{j=1}^n P_{(r_j)}(t_j) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{2} \frac{1 - r_j^2}{1 - 2r_j \cos t + r_j^2}.$$

Мы интересуемся оценками $g(z)$ на подостове $\mathbb{T}^n = T^n \times [0, 1)$ (когда $z = \zeta \rho$, $\zeta \in T^n$, $0 \leq \rho < 1$). Опираясь на сказанное, получаем

Предложение 2.3. Пусть аналитическая в U^n функция $g(z)$ имеет при $\rho \rightarrow 1$ граничное значение $h \in L_p(T^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, со спектром вне Q_1 . Тогда справедливы оценки

$$|g(\zeta \rho)| \leq C_1 \rho^l (\mathbb{M}h)(t), \quad (2.13)$$

$$\|g(\zeta \rho)\|_{L_p(T^n)} \leq C_2 \rho^l \|h\|_{L_p(T^n)}, \quad (2.14)$$

где постоянные C_1, C_2 не зависят от l .

Доказательство. Неравенство (2.14) следует из (2.12) на основании неравенства Юнга и свойств ядра Пуассона. Учитывается, конечно, соотношение (2.11) и тот факт, что $\rho^{nl} \leq \rho^l$ при $\rho \in [0, 1)$.

Оператор $\mathbb{M}$ в (2.13) обозначает суперпозицию одномерных максимальных операторов Харди–Литтлвуда M_j , $j = 1, \dots, n$,

$$\mathbb{M} = M_1 \circ \dots \circ M_n,$$

действующих по переменному с указанным внизу индексом.

Замечание 2.3. Ясно, что операторы M_j , $j = 1, \dots, n$, и оператор $\mathbb{M}$ ограничены в $L_p(T^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, т.е.

$$\|M_j h\|_{L_p(T^n)} \leq C \|h\|_{L_p(T^n)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.15)$$

$$\|\mathbb{M}h\|_{L_p(T^n)} \leq C \|h\|_{L_p(T^n)}. \quad (2.16)$$

Неравенство (2.15) получается применением максимального неравенства Харди–Литтлвуда по переменной x_j и последующим взятием L_p -нормы по остальным переменным. При получении (2.16) используются теорема Фубини и индукция.

Замечание 2.4. Важно отметить, что оценка, аналогичная (2.16), действует и для l_q -значных функций $\varphi = \{\varphi_j\}_0^\infty$ при естественном определении $\mathbb{M}\varphi = \{\mathbb{M}\varphi_j\}_0^\infty$. В самом деле, положим

$$M_2 \circ \dots \circ M_n \varphi(t_1, \dots, t_n) = \overset{1}{\psi}(t_1, \dots, t_n).$$

Фиксируя переменные $t_2, \dots, t_n$, применим известную теорему Феффермана–Стейна [11]

$$\int_0^{2\pi} |M_1 \overset{1}{\psi}|_{l_q}^p dt_1 \leq C \int_0^{2\pi} |\overset{1}{\psi}|_{l_q}^p dt_1.$$

Интегрируя по оставшимся переменным, имеем

$$|M_1 \overset{1}{\psi}, L_p(l_q)| \leq C |\overset{1}{\psi}, L_p(l_q)|. \quad (2.17)$$

Но $\overset{1}{\psi} = M_2 \overset{2}{\psi}$, $\overset{2}{\psi} = M_3 \circ \dots \circ M_n \varphi$. Повторяя рассуждение, получим из (2.17)

$$|M_1 \circ M_2 \overset{2}{\psi}, L_p(l_q)| \leq C |\overset{2}{\psi}, L_p(l_q)|.$$

Итерируя дальше, придем в итоге к неравенству

$$|\mathbb{M}\varphi, L_p(l_q)| \leq C |\varphi, L_p(l_q)|, \quad (2.18)$$

что и утверждалось.

З а м е ч а н и е 2.5. Полезно напомнить здесь, что упомянутый в разд. 1 признак Марцинкевича является следствием теоремы I. Отметим, что по существу этот же признак действует и в пространствах $B_{p,q}^\alpha(T^n)$ и $L_{p,q}^\alpha(T^n)$.

В самом деле, теорема Литтлвуда–Пэли утверждает совпадение (с точностью до эквивалентности норм) пространств $L_{p,2}^0(T^n)$ и $L_p(T^n)$. Но $L_{p,2}^0(T^n)$ можно отождествить с подпространством $L_p(T^n, l_2)$, рассматривая совокупность $\{f_m\}_0^\infty$ как l_2 -вектор-функцию. На основе сказанного и теоремы I получаем, что совокупность чисел $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ будет мультипликатором в L_2 , если совокупность указанных чисел, заключенных в коридоре $\overset{m}{Q} \setminus \overset{m-1}{Q}$, имеет ограниченную вариацию (в смысле теоремы I) равномерно по m .

Небольшое размышление показывает, что тот же самый признак получается для $B_{p,q}^\alpha(T^n)$ и $L_{p,q}^\alpha(T^n)$ (см. подробности в [5]).

3. Доказательство основных теорем

Сначала в подразд. 3.1 доказываются теоремы, характеризующие граничные свойства функций из $\mathcal{B}$ -пространств, а затем — в 3.2 — из $\mathcal{L}$ -пространств. Между построениями в том и другом случае имеется заметный параллелизм, однако второй случай труднее (приходится привлекать более сложный аппарат: векторнозначные мультипликаторы, максимальные функции и пр.).

Принятый способ изложения позволяет достичь большей ясности. Повторов мы старались избежать.

3.1. Случай пространств типа Никольского–Бесова

Начнем с развернутых определений.

О п р е д е л е н и е 3.1. Голоморфным пространством Никольского–Бесова $B_{p,q}^{\alpha}(U^n) \equiv B_{p,q}^{\alpha+}$, $\alpha \geq 0$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, назовем совокупность голоморфных в U^n

$$U^n = \{z; z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$$

функций $w(z)$, удовлетворяющих при некотором натуральном s условию

$$b_{p,q}^{\alpha+}(w) = \left\{ \int_0^1 (1-\rho)^{q(s-\alpha)-1} \|(\mathcal{R}^s w)(r_\rho e^{it})\|_{L_p(T^n)}^q \rho^n d\rho \right\}^{1/q} < \infty, \quad (3.1)$$

$$b_{p,\infty}^{\alpha}(w) = \sup_{\rho \in [0,1)} (1-\rho)^{s-\alpha} \|(\mathcal{R}^s w)(r_\rho e^{it})\|_{L_p(T^n)} < \infty.$$

Напомним, что здесь $\mathcal{R}$ — оператор "радиальной" производной [12]

$$\mathcal{R}w = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial w}{\partial z_j}. \quad (3.2)$$

Через T^n обозначен остов U^n , т.е. n -мерный тор

$$T^n = \{z; z \in \mathbb{C}^n, |z| = 1, j = 1, \dots, n\}.$$

Символ $\|\cdot\|_p \equiv \|\cdot\|_{L_p} \equiv \|\cdot\|_{L_p(T^n)}$, как и прежде, обозначает норму в $L_p(T^n)$.

В (3.1) выражение $(r_\rho e^{it})$ следует понимать как $(\rho e^{it_1} \dots \rho e^{it_n})$, причем знак $\wedge$ над t означает, что переменная t считается "немой" (по t производится интегрирование). Число s не участвует в индексации рассматриваемых пространств в силу того, что зависимость от него несущественна (с точностью до эквивалентности норм).

Оператор $\mathcal{R}^s$ "съедает" лишь константу, поэтому в качестве нормы в $B_{p,q}^{\alpha+}$ выступает величина

$$|w, B_{p,q}^{\alpha+}| = |w(0)| + b_{p,q}^{\alpha+}(w).$$

При такой нормировке $B_{p,q}^{\alpha+}$ становится банаховым пространством.

Определение пространств Никольского–Бесова $B_{p,q}^{\alpha}(T^n)$ приведено в разд.1.

В данном разделе будет доказана

Т е о р е м а 3.1. Для того чтобы голоморфная в полидиске U^n функция $w(z)$, $z \in U^n$ принадлежала пространству $B_{p,q}^{\alpha+}(U^n)$, $\alpha \geq 0$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы граничное значение $f(t)$, $t \in T^n$, функции $w(z)$ на остове T^n , понимаемое в смысле

$$f(t) \stackrel{\mathcal{D}'}{=} \lim_{\rho \rightarrow 1} w(\rho e^{it_1}, \dots, \rho e^{it_n}), \quad (3.3)$$

принадлежало пространству Никольского–Бесова $B_{p,q}^\alpha(T^n)$ и имело бы неотрицательный спектр. При этом имеет место соотношение эквивалентности

$$|w, B_{p,q}^\alpha| \sim |f, B_{p,q}^\alpha|.$$

Доказательство. Начнем с необходимости, т.е. докажем импликацию

$$w \in B_{p,q}^\alpha \Rightarrow f \in B_{p,q}^\alpha.$$

Согласно определению $B_{p,q}^\alpha$ будем опираться на существование интеграла

$$\int_0^1 (1-\rho)^{q(s-\alpha)-1} \|(\mathcal{R}^s w)(\rho e^{it_1}, \dots, \rho e^{it_n})\|_{L_p(T^n)}^q \rho^n d\rho, \quad (3.4)$$

задающего полунорму w в $B_{p,q}^\alpha$. Пусть

$$w(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} C_k z^k = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} C_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}.$$

Согласно сказанному величина $\mathcal{R}^s w$ в (3.4) и функция $f(t) = \lim_{\rho \rightarrow 1} w(z)$ изображаются рядами.

$$(\mathcal{R}^s w)(\rho e^{it_1}, \dots, \rho e^{it_n}) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} C_k |k|^s (\rho e^{it_1})^{k_1} \dots (\rho e^{it_n})^{k_n} = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} C_k |k|^s \rho^{|k|} e^{ikt}, \quad (3.5)$$

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} C_k e^{ikt}, \quad |k| = k_1 + \dots + k_n,$$

и нам предстоит дать оценку величины

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m\alpha q} \|f_m\|_p^q$$

через норму $\|w, B_{p,q}^\alpha\|$. При $m \geq 1$ имеем

$$f_m(t) = \sum_{k \in K_m} C_k e^{ikt} = \sum_{k \in K_m} \frac{1}{|k|^s \rho^{|k|}} [C_k |k|^s \rho^{|k|} e^{ikt}]. \quad (3.6)$$

Будем рассматривать соотношение (3.5) как кратный ряд Фурье, коэффициенты которого зависят от параметра ρ , и разобьем этот ряд на пачки по коридорам K_m (см. разд. 1)

$$[\mathcal{R}^s w]_m = \sum_{k \in K_m} C_k |k|^s \rho^{|k|} e^{ikt}. \quad (3.7)$$

Пачка (3.7) получается из пачки (3.6) при действии мультипликаторного преобразования множителями

$$\mu_k = \frac{1}{|k|^s \rho^{|k|}}.$$

При $\rho \in [\frac{1}{2}, 1)$ норма этого преобразования не превосходит $\text{const} \cdot 2^{-ms}$ (это проверяется с помощью признака Марцинкевича, см. разд. 1 и 2). Следовательно,

$$\|f_m\|_p \leq C \cdot 2^{-ms} \|[\mathcal{R}^s w(re^{it})]\|_p, \quad (3.8)$$

где $r = (\rho, \dots, \rho)$, $\rho \in [\frac{1}{2}, 1)$, константа C не зависит ни от m , ни от ρ .

Домножая (3.8) на $2^{m\alpha}$ и применяя теорему о мультипликаторах (многомерный вариант теоремы Рисса о L_p -оценке проектора), получим

$$2^{m\alpha} \|f_m\|_p \leq C \cdot 2^{m(\alpha-s)} \|\mathcal{R}^s w(re^{it})\|_p. \quad (3.9)$$

Возведем (3.9) в степень q и проинтегрируем в пределах от $(1 - 2^{-m})$ до $(1 - 2^{-m-1})$

$$2^{m\alpha q} \|f_m\|_p^q \leq C \cdot 2^{m(\alpha-s)q} \frac{1}{2^{-m}} \int_{1-2^{-m}}^{1-2^{-m-1}} \|\mathcal{R}^s w(r_\rho e^{it})\|_p^q d\rho.$$

Просуммируем по m от 1 до ∞ (при этом под интегралом справа можно писать множитель ρ^n , поскольку $\rho > \frac{1}{2}$):

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m\alpha q} \|f_m\|_p^q &\leq C \sum_{m=1}^{\infty} \int_{1-2^{-m}}^{1-2^{-m-1}} (1-\rho)^{(s-\alpha)q-1} \|\mathcal{R}^s w(r_\rho e^{it})\|_p^q \rho^n d\rho = \\ &= C \int_{1/2}^1 (1-\rho)^{(s-\alpha)q-1} \|\mathcal{R}^s w(r_\rho e^{it})\|_p^q \rho^n d\rho \leq C b_{p,q}^\alpha(w). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Напомним, что здесь $r_\rho = (\rho, \dots, \rho)$.

В силу наших определений величина $f_m(t)|_{m=0} \equiv f_0(t)$ совпадает с нулевым коэффициентом C_0 ряда Фурье функции f

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} C_k e^{ikt},$$

а последний в свою очередь совпадает с $w(0)$ (ибо $w(z) = \sum C_k r^k e^{ikt}$, $f(t) = \lim_{r \rightarrow 1} w(z)$). Поэтому, добавляя слева в (3.10) $|C_0|$, а справа $|w(0)|$, получим окончательно (при $1 \leq q < \infty$)

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m\alpha q} \|f_m\|_p^q \leq C |w, \mathcal{B}_{p,q}^\alpha|.$$

Аналогичное заключение при $q = \infty$ следует непосредственно из (3.9) после замены справа $2^{m(\alpha-s)}$ на $(1 - \rho)^{(s-\alpha)}$. Необходимость доказана (поскольку неотрицательность спектра f очевидна).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Предположим теперь, что функция f имеет неотрицательный спектр и принадлежит $B_{p,q}^\alpha(T^n)$, т.е. представляется рядом

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} C_k e^{ikt}$$

(при $\alpha > 0$ можно говорить о сходимости ряда в метрике L_p , при $\alpha = 0$ имеется в виду слабая сходимость), для которого конечна величина

$$\left\{ \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m\alpha q} \|f_m\|_p^q \right\}^{1/q}. \quad (3.11)$$

Нам предстоит дать оценку выражения

$$J^q = \left\{ \int_0^1 (1-\rho)^{(s-\alpha)q-1} \|\mathcal{R}^s w(r_\rho e^{it})\|_p^q \rho^n d\rho \right\}$$

через величину (3.11). Напомним, что

$$w(r_\rho e^{it}) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} C_k r^k e^{ikt} \Big|_{r=(\rho_1, \dots, \rho_n)} = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} C_k \rho^{|k|} e^{ikt}.$$

Имеем (запись $k \geq 0$ равносильна тому, что $k \in \mathbb{N}^n$)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}^s w(r_\rho e^{it})\|_p &= \left\| \sum_{k \geq 0} |k|^s C_k r^k e^{ikt} \right\|_p = \\ &= \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k \in K_m} |k|^s C_k r^k e^{ikt} \right\|_p \leq \sum_{m=0}^{\infty} \left\| \sum_{k \in K_m} |k|^s C_k r^k e^{ikt} \right\|_p. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Внутренняя сумма получается из выражения

$$w_m(r e^{it}) = \sum_{k \in K_m} C_k r^k e^{ikt}$$

с помощью мультипликаторного преобразования с множителем $|k|^s \sim |k|_\infty^s$, где величина $|k|_\infty = \max\{k_1, \dots, k_n\}$ меняется в пределах от 2^{m-1} до $2^m - 1$. Норма этого мультипликаторного преобразования мажорируется числом 2^{ms} (здесь по существу применяется неравенство типа Бернштейна, см. разд. 2). Поэтому из (3.12) получаем

$$\|\mathcal{R}^s w(r_\rho e^{it})\|_p \leq C \sum_{m=1}^{\infty} 2^{ms} \|w_m(r_\rho e^{it})\|_p \leq C \sum_{m=1}^{\infty} 2^{ms} \rho^{2^{m-1}} \|f_m\|_p. \quad (3.13)$$

На последнем шаге применено неравенство (2.14).

Дальнейшие выкладки носят технический характер и сопровождаются минимальными пояснениями. В силу (3.13) имеем при $1 \leq q < \infty$

$$J^q \leq C \int_0^1 (1-\rho)^{(s-\alpha)q-1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} 2^{ms} \rho^{2^{m-1}} \|f_m\|_p \right)^q \rho^n d\rho \leq$$

(применяется неравенство Гельдера к сумме)

$$\leq C \int_0^1 (1-\rho)^{(s-\alpha)q-1} \times$$

$$\times \left(\sum_{m=0}^{\infty} \rho^{2^{m-1}} \cdot 2^{msq-m(s-\alpha)(q-1)} \|f_m\|_p^q \right) \left(\sum \rho^{2^{m-1}} \cdot 2^{m(s-\alpha)q-1} \right) \rho^n d\rho. \quad (3.14)$$

Воспользуемся неравенствами, вывод которых большого труда не составляет ($\delta, \varepsilon > 0$):

$$\sum_{m \geq 0} \rho^{\varepsilon \cdot 2^m} \cdot 2^{\delta m} \leq C(1-\rho)^{-\delta}, \quad 0 < \rho < 1, \quad (3.15)$$

$$\int_0^1 (1-\rho)^{\delta-1} \rho^{\varepsilon \cdot 2^m} \leq C \cdot 2^{-m\delta}. \quad (3.16)$$

Продолжая (3.14), получим с учетом (3.15), а затем и (3.16)

$$J^q \leq \int_0^1 (1-\rho)^{s-\alpha-1} \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{2^{m-1}} \cdot 2^{msq-m(s-\alpha)(q-1)} \|f_m\|_p \rho^n d\rho =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_0^1 (1-\rho)^{s-\alpha-1} \rho^{2^{m-1}} \rho^n d\rho \right) \cdot 2^{msq-m(s-\alpha)(q-1)} \|f_m\|_p^q \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m\alpha q} \|f_m\|_p^q, \quad (3.17)$$

что и требовалось. Поскольку $f_0(x) = f(0) = C_0$, то при $1 \leq q < \infty$ доказательство закончено.

При $q = \infty$ действуем аналогично. Имеем

$$\sup_{0 \leq \rho < 1} (1-\rho)^{s-\alpha} \|\mathcal{R}^s w(r_\rho e^{it})\|_p \leq \sup_{0 \leq \rho < 1} (1-\rho)^{s-\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \|\mathcal{R}^s w_m\|_p \leq$$

$$\leq \sup_{\rho \in [0,1)} (1-\rho)^{s-\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{ms} \rho^{2^{m-1}} \|f_m\|_p \leq$$

$$\leq \left(\sup_{m \in \mathbb{N}_+} 2^{m\alpha} \|f_m\|_p \right) \sup_{\rho} (1-\rho)^{s-\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m(s-\alpha)} \rho^{2^{m-1}} \leq C \sup_{m \in \mathbb{N}_+} 2^{m\alpha} \|f_m\|_p.$$

На последнем шаге использовано неравенство (3.16). Теорема доказана.

3.2. Случай $\mathcal{L}$ -пространств

Примем обозначения предыдущего подраздела. Уделяя меньше внимания деталям, будем подчеркивать различия в доказательствах при переходе от $\mathcal{B}$ - к $\mathcal{L}$ -пространствам.

О п р е д е л е н и е 3.2. Голоморфным $\mathcal{L}$ -пространством назовем совокупность $\mathcal{L}_{p,q}^+(U^n)$ голоморфных в U^n функций $w(z)$ с конечной полунормой (при $1 \leq q < \infty$ и $q = \infty$ соответственно)

$$l_{p,q}^\alpha(w) = \left\| \left\{ \int_0^1 (1-\rho)^{(s-\alpha)q-1} |\mathcal{R}^s w(r_\rho e^{it})|^q \rho^n d\rho \right\}^{1/q} \right\|_{L_p(T^n)},$$

$$l_{p,\infty}^\alpha(w) = \left\| \sup_{\rho \in [0,1)} (1-\rho)^{s-\alpha} |\mathcal{R}^s w(r_\rho e^{it})| \right\|_{L_p(T^n)},$$

где $0 \leq \alpha < s \in \mathbb{N}_+$, $1 \leq p < \infty$.

Т е о р е м а 3.2. Для принадлежности голоморфной в U^n функции $w(z)$ к $\mathcal{L}_{p,q}^+(U^n)$, $1 < p, q < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $w(z)$ обладала граничным значением $w(e^{it}) = f(t)$ на T^n класса $L_{p,q}^\alpha(T^n)$ со спектром в $\mathbb{N}^n$. При этом имеет место соотношение эквивалентности

$$|w, \mathcal{L}_{p,q}^+(U^n)| \sim |f, B_{p,q}^\alpha(T^n)|.$$

З а м е ч а н и е 3.1. Норма в пространстве $\mathcal{L}_{p,q}^+(U^n)$, превращающая его в полное нормированное пространство, задается равенством

$$|w, \mathcal{L}_{p,q}^+(U^n)| = |w(0)| + l_{p,q}^\alpha(w).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказательстве необходимости нужно установить, что если $w \in \mathcal{L}_{p,q}^+(U^n)$ и существует $\lim_{\rho \rightarrow 1} w(r_\rho e^{it}) = f(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} C_k e^{ikt}$, то

$$\left\{ \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m\alpha q} |f_m(t)|^q \right\}^{1/q} \in L_p(T^n) \quad (3.18)$$

и справедлива соответствующая оценка. Эту оценку мы и получаем ниже. В отличие от доказательства теоремы 3.1 основную роль здесь играет теорема I о мультипликаторах для l_q -значной функции и теорема II (см. разд. 1).

При $1 < q < \infty$ выражение (3.18) можно связать с действием мультипликаторного преобразования на вектор-функцию, порожденную рядом

$$\mathcal{R}^s w(r_\rho e^{it}) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} |k|^s C_k \rho^{|k|} e^{ikt}, \quad (3.19)$$

где C_k — коэффициенты Фурье функции $f(t)$. Это делается так. Положим

$$\begin{aligned} \sigma &= \left\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m\alpha q} |f_m(t)|^q \right\}^{1/q} \right\|_p = \left\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m\alpha q} \frac{1}{N_m} \overbrace{[|f_m(t)|^q + \dots + |f_m(t)|^q]}^{N_m \text{ раз}} \right\}^{1/q} \right\|_p = \\ &= \left\| \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 2^{m\alpha q} \frac{1}{N_m} \left[\sum_{j=1}^{N_m} \left| \sum_{k \in K_m} \frac{1}{|k|^s \rho_{mj}^{|k|}} C_k |k|^s \rho_{mj}^{|k|} e^{ikt} \right|^q \right] \right\}^{1/q} \right\|_p. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь N_m — достаточно большое натуральное число (выбор которого производится ниже), числа $\rho_{mj} \equiv \rho_{m,j}$ определяются равенствами

$$\rho_{mj} = 1 - 2^{-m} + 2^{-m-1} \frac{j}{N_m}$$

(эти числа разбивают промежуток $[1 - 2^{-m}, 1 - 2^{-m-1}]$ на N_m равных частей).

Выражение (3.20) можно рассматривать как $L_p(l_q)$ -норму выражения, полученного при действии на вектор-функцию

$$\left\{ \sum_{k \in K_m} \frac{2^{m(\alpha-s)}}{N_m} C_k |k|^s \rho_{mj}^{|k|} e^{ikt} \right\}_{m,j} \in L_p(l_q)$$

мультипликатора $\{2^{ms} |k|^{-s} \rho_{mj}^{|k|}\}$. Пользуясь теоремой I, нетрудно видеть, что норма этого мультипликаторного оператора конечна и поэтому

$$\sigma \leq C \left\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m(\alpha-s)q} \frac{1}{N_m} \sum_{j=1}^{N_m} |[(\mathcal{R}^s w)(\rho_{mj} e^{ikt})]_m|^q \right\}^{1/q} \right\|, \quad (3.21)$$

где $[(\mathcal{R}^s w)(\rho e^{it})]_m$ — коридор в разложении (3.19), соответствующий суммированию по $k \in K_m$.

Под знаком модуля в (3.21) стоит при каждом m ряд (точнее, отрезок ряда) Фурье. Заменим этот модуль мажорантой упомянутого ряда и воспользуемся обобщением теоремы Рубио де Франсиа (см. теорему II). На этом пути получим из (3.21)

$$\sigma \leq C \left\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m(\alpha-s)q} \frac{1}{N_m} \sum_{j=1}^{N_m} |\mathcal{R}^s w(\rho_{mj} e^{ikt})|^q \right\}^{1/q} \right\|_{L_p}. \quad (3.22)$$

З а м е ч а н и е 3.2. При вышеуказанном применении теоремы II следует коридор $[\]_m$ представлять в виде разности соответствующих кубических частных сумм порядка 2^m и 2^{m-1} соответственно.

Осталось заметить, что внутренняя сумма в (3.22) при домножении на 2^{-m-1} с любой степенью точности (при надлежащем выборе N_m) приближает интеграл

$$2^{m+1} \int_{1-2^{-m}}^{1-2^{-m-1}} |\mathcal{R}^s w(\rho e^{ikt})|^q d\rho \leq 2^{m+1} \int_{1-2^{-m}}^{1-2^{-m-1}} |\mathcal{R}^s w(\rho e^{it})|^q \left(\frac{\rho}{1-2^{-m}} \right)^n d\rho.$$

Сказанное позволяет заключить, что

$$\sigma \leq C \left\| \left\{ \int_{1/2}^1 (1-\rho)^{(s-\alpha)q-1} |\mathcal{R}^s w(\rho e^{it})|^q \rho^n d\rho \right\}^{1/q} \right\|_p.$$

Конечно, нижний предел интегрирования $1/2$ можно заменить теперь на 0 . С учетом того, что $f_0(t)$ совпадает с нулевым коэффициентом Фурье функции $f(t)$, а последний в свою очередь равен $w(0)$, получим окончательно

$$\left\| \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m\alpha q} |f_m(t)|^q \right\}^{1/q} \right\|_p \leq C \left(|w(0)| + \left\| \left\{ \int_0^1 (1-\rho)^{(s-\alpha)q-1} |\mathcal{R}^s w(\rho e^{it})|^q \rho^n d\rho \right\}^{1/q} \right\|_p \right)$$

и необходимость можно считать установленной.

Доказательство достаточности в значительной мере напоминает соответствующее доказательство для $\mathcal{B}$ -пространств. Существенно новым моментом наряду с вышеупомянутыми является привлечение максимальной функции и максимального неравенства (в том числе, и в векторнозначном варианте).

Пусть $f \in L_{p,q}^\alpha(T^n)$ и имеет неотрицательный спектр, т.е. $C_k = 0$ при $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n$ (где C_k — коэффициент Фурье f). В этих условиях функция

$$w(re^{it}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P_r(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

является голоморфной в U^n . При этом

$$\mathcal{R}^s f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P_r(t-\tau) (-\Delta)^s f(\tau) d\tau, \quad (3.23)$$

где $(-\Delta)$ — оператор Лапласа на T^n . В дальнейшем для краткости записи положим $(-\Delta)^s f = f^{(s)}$. Исходя из этого пишем

$$\begin{aligned} I &= \left\| \left\{ \int_0^1 (1-\rho)^{(s-\alpha)q-1} |\mathcal{R}^s w(r_\rho e^{it})|^q \rho^n d\rho \right\}^{1/q} \right\|_p = \\ &= \left\| \left\{ \int_0^1 (1-\rho)^{(s-\alpha)q-1} |P_{r_\rho} * f^{(s)}(t)|^q \rho^n d\rho \right\}^{1/q} \right\|_p \leq \\ &\leq \left\| \left\{ \int_0^1 (1-\rho)^{(s-\alpha)q-1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |P_{r_\rho} * f_m^{(s)}(t)| \right)^q \rho^n d\rho \right\}^{1/q} \right\|_p. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Здесь через $f_m^{(s)}$ обозначен m -й коридор, порожденный функцией $f^{(s)}$. Поскольку $P_{r_\rho} * f_m^{(s)}(t)$ — аналитическая функция, удовлетворяющая условиям предложения 2.3 (следует учесть, что согласно (3.23) она совпадает с $[\mathcal{R}^s f(z)]_m$), то по (2.13)

$$|P_{r_\rho} * f_m^{(s)}(t)| \leq C \rho^{2^{m-1}} \mathbb{M} f_m^{(s)}(t).$$

Продолжая выкладку (3.24), имеем

$$I \leq C \left\| \left\{ \int_0^1 (1-\rho)^{(s-\alpha)q-1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \rho^{2^{m-1}} |\mathbb{M} f_m^{(s)}(t)| \right)^q \rho^n d\rho \right\}^{1/q} \right\|_p \leq$$

(применяя неравенство Гельдера и т.д., как в (3.14)–(3.17))

$$\leq C_1 \left\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m(\alpha-s)q} |\mathbb{M} f_m^{(s)}|^q \right\}^{1/q} \right\| \leq C_2 \left\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m(\alpha-s)q} |f_m^{(s)}(t)|^q \right\}^{1/q} \right\|_p.$$

На последнем шаге мы применили неравенство (2.18). Пользуясь, наконец, неравенством типа Бернштейна, получим окончательно

$$I \leq C \left\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m\alpha q} |f_m(t)|^q \right\}^{1/q} \right\|_p.$$

Остальное ясно. Теорема доказана.

Заключение

Скажем несколько слов о распространении вышеизложенных результатов на случай n -гармонических функций. Выскажем также ряд замечаний, относящихся к рассматриваемой тематике в целом.

Известно [9], что вещественная часть u (так же как и мнимая v) голоморфной функции $w(z) = u(z) + iv(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, является n -гармонической функцией [12], т.е. функция $u(z_1, \dots, z_n)$ гармонична по каждой паре переменных x_j, y_j ($x_j + iy_j = z_j$). Конечно, не каждая вещественная n -гармоническая функция является вещественной частью голоморфной функции при $n > 1$.

В дальнейшем n -гармонические функции называются также раздельно гармоническими и считаются комплекснозначными. Совокупность раздельно гармонических функций $W(z) = U(z) + iV(z)$ в U будем обозначать через $\mathcal{H}(U^n)$.

Раздельно гармонические в U^n функции тесно связаны со своими граничными значениями на остоле T^n полидиска U^n . При определенных условиях эта связь осуществляется интегралом Пуассона.

Функция $W \in \mathcal{H}(U^n)$ обладает граничными значениями на

$$\lim_{r \rightarrow 1} W(r_\rho e^{it}) \stackrel{\mathcal{D}'}{=} \mathcal{F}(t) \quad (4.1)$$

и однозначно восстанавливается по этим граничным значениям с помощью интеграла Пуассона

$$W(re^{it}) = \frac{1}{\pi^n} \int_{T^n} P_r(t - \tau) \mathcal{F}(\tau) d\tau.$$

Исходя из этого удастся развить теорию $\mathcal{B}$ - и $\mathcal{L}$ -пространств отдельно гармонических функций в U^n в связи с их граничными значениями на T^n , вполне аналогичную голоморфному случаю. При этом в качестве ключевого момента выступает возможность представить функцию W из $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ рядом Тейлора вида

$$W(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} C_k r_1^{|k_1|} \dots r_n^{|k_n|} e^{ik \cdot t}.$$

Соответствующие пространства приходится вводить на основе оператора дифференцирования по r (поскольку дифференцирование по z_j теперь лишено смысла):

$$\mathcal{B}_{p,q}^\alpha(U^n) = \left\{ W \in \mathcal{H}(U^n); \left\{ \int_0^1 (1-\rho)^{(s-\alpha)q-1} \left\| \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^s W(r_\rho e^{it}) \right\|_p^q \rho^n d\rho \right\} < \infty \right\},$$

$$\mathcal{L}_{p,q}^\alpha(U^n) = \left\{ W \in \mathcal{H}(U^n); \left\| \left\{ \int_0^1 (1-\rho)^{(s-\alpha)q-1} \left| \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^s W \right|^q \rho^n d\rho \right\}^{1/q} \right\|_p < \infty \right\}.$$

Для этих пространств справедлива

Теорема 4.1. Пусть $1 < p, q < \infty$. Для того чтобы отдельно гармоническая функция W принадлежала пространству $\mathcal{B}_{p,q}^\alpha(U^n)$ (соответственно $\mathcal{L}_{p,q}^\alpha(U^n)$), необходимо и достаточно, чтобы ее граничное значение $\mathcal{F}(t)$ (см. (4.1)) принадлежало пространству $B_{p,q}^\alpha(T^n)$ (соответственно $L_{p,q}^\alpha(T^n)$). При этом соответствующие нормы эквивалентны.

Доказательство этой теоремы в значительной мере повторяет доказательства теорем предыдущего раздела, однако требует привлечения и новых соображений. В последующей нашей работе соответствующие доказательства развертываются в рамках UMD-значных функций W . Попутно получены аналогичные утверждения и для голоморфных функций со значениями в UMD.

В заключение отметим, что для построения $\mathcal{B}$ - и $\mathcal{L}$ -пространств можно привлечь вместо операторов $z \frac{\partial}{\partial z}$, $r \frac{\partial}{\partial r}$ другие операторы. В n -гармоническом случае можно опираться на степени оператора $(-\Delta)$ по "тангенциальным переменным" $t \in T^n$ или же использовать смешанные производные. Представляет интерес использование дробных степеней оператора $\left(\frac{\partial}{\partial r} r \right)$.

В голоморфном случае представляют интерес степени оператора $\frac{\partial}{\partial z} z$, а также набор операторов частного дифференцирования по переменным z_j . Надлежащие мультипликативные свойства выбранного семейства операторов обеспечивают справедливость теорем того типа, которые рассмотрены выше.

Отметим, что $\mathcal{B}$ -пространства голоморфных и гармонических функций в одномерном диске изучались при $1 \leq p, q \leq \infty$ Т.М.Флеттом [13]. П.Освальд [14] изучал эти пространства в голоморфном случае при значениях $0 < p, q \leq \infty$, при этом он исследовал также некоторые аналоги пространств $\mathcal{L}_{p,q}^{\pm}(U)$. Полученные в данной работе результаты обобщают указанные исследования на многомерный случай, а по развитой методике являются новыми также и при $n = 1$.

Следует упомянуть еще работу Г.А.Калябина [15], в которой впервые была решена задача об описании пространств $L_{p,q}^{\alpha}(R^n)$ в терминах гармонического продолжения на R_+^{n+1} , поставленная в [16]. Эта задача аналогична той, что решается теоремой 4.1. Методика Г.А.Калябина [15] основана на максимальных неравенствах, отличных от используемых нами, и допускает перенесение на U^n . Отправляясь от идей Г.А.Калябина, мы распространяем теорию $\mathcal{B}$ - и $\mathcal{L}$ -пространств в U^n на случай нестепенных весов.

Поступило в октябре 1992 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шведенко С.В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге и шаре // Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1983. Т.21. С.3–124. (Итоги науки и техники).
2. Гулиев В.С., Лизоркин П.И. $\mathcal{B}$ - и $\mathcal{L}$ -классы гармонических и голоморфных функций и классы граничных значений // ДАН СССР. 1991. Т.319, №4. С.806–809.
3. Schmeisser H.I., Triebel H. Topics in Fourier analysis and function spaces. Leipzig, 1987.
4. Бесов О.В., Кудрявцев Л.Д., Лизоркин П.И., Никольский С.М. Исследования по теории пространств дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН. 1988. Т.182. С.68–127.
5. Лизоркин П.И. О мультипликаторах интегралов Фурье в пространствах $L_{p,\theta}$ // Тр. МИАН. 1967. Т.89. С.231–248.
6. Rubio de Francia J.L. Vector-valued inequalities for Fourier series // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. Vol.78, N4. P.525–528.
7. Guliev V.S., Lizorkin P.I. Generalization of the vector-valued inequality by Rubio de Francia on multiple Fourier series and integrals // Тр. Междунар. симпоз. по механике сплошной среды. Тбилиси, июнь, 1991.
8. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.
9. Hardy G.H., Littlewood J.E. A maximal theorem with function-theoretic applications // Acta math. 1990. Vol.54. P.81–116.
10. Лизоркин П.И. Обобщенное ливиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. МИАН. 1969. Т.105. С.89–167.
11. Fefferman G., Stein E.M. Some maximal inequalities // Amer. J. Math. 1971. Vol.93. P.107–115.
12. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
13. Flett T.M. Lipschitz spaces of functions on the circle and disc // J. Math. Anal. Appl. 1972. Vol.39. P.125–158.
14. Oswald P. On Besov–Hardy–Sobolev spaces of analytic functions in the unit disc // Czechosl. Math. J. 1983. Vol.33. P.408–426.
15. Калябин Г.А. Описание функций из классов типа Бесова–Лизоркина–Трибеля // Тр. МИАН. 1980. Т.156. С.82–109.
16. Лизоркин П.И. Оператор усеченного дифференцирования в теории вложений // Матер. Сов.-Чехосл. симпоз. по теории функций. Новосибирск, 1972. С.135–139.