

УДК 517.5

В.С. Гулиев

Двухвесовые неравенства для интегральных операторов в L_p -пространствах и их приложения

Получены двухвесовые L_p -оценки с монотонными весами для интегральных операторов типа потенциала и для сингулярных интегральных операторов (см. теоремы 1.8, 1.9). С помощью этих теорем получены весовые теоремы вложения для пространств С.Л.Соболева $W_p^l(R^n; \omega_0, \dots, \omega_n)$. Выявлены также весовые "эффекты" для интегральных операторов, возникающих на основе интегрального представления В.П.Ильина, О.В.Бесова для областей в R^n , удовлетворяющих условию l -рога (см. теорему 2.2), а также для параболического потенциала и параболического сингулярного интеграла (см. теоремы 3.1, 3.3). С помощью этих теорем получены весовые теоремы вложения для пространств $W_p^l(\Omega; \omega_0, \dots, \omega_n)$, определенных на области Ω , граница которой не является гладкой (см. теорему 2.3). В частности, из этой теоремы получены весовые теоремы вложения для пространств С.Л.Соболева $W_p^l(\Omega; \omega_0, \dots, \omega_n)$ для весов экспоненциального роста.

Полученные весовые оценки обобщают соответствующие результаты А. Ф. Кочарли [17], а также более ранние результаты С.В.Успенского [18] и частично результаты О.В.Бесова [19], П.И.Лизоркина [20], В.Г.Перепелкина [21].

1.

Пусть R^n — n -мерное евклидово пространство, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — векторы в R^n , $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$, $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$, $R_0^n = R^n \setminus \{0\}$, $\Sigma = \{x \in R^n : |x| = 1\}$.

Рассмотрим действительную $(n \times n)$ -матрицу A с собственными числами λ_j , $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ и $\gamma = \operatorname{tr} A$ — след матрицы. Матрица A определяет однопараметрическую группу $A_t = \exp(A \ln t)$, $t \in R_+ = \{t \in R; t > 0\}$, невырожденных преобразований пространства R^n . Через $\operatorname{diag} \{l_1, \dots, l_n\}$ будем обозначать матрицу с числами $l_1, \dots, l_n$ на главной диагонали и нулевыми недиагональными элементами. С группой A_t связана гладкая в R_0^n A_t -однородная метрика $\rho: R_0^n \rightarrow R_+$, $\rho(A_t x) = t\rho(x)$.

Если $x \in R^n$ и $r > 0$, то шаром (сферой) с центром в точке x и радиусом $r > 0$ называется множество

$$B(x, r) = \{y; \rho(x - y) \leq r\} \quad (S(x, r) = \{y; \rho(x - y) = r\}).$$

Пусть ω — положительная измеримая функция в R^n . Через $L_p(R^n, \omega)$ обозначим пространство измеримых функций $f(x)$, $x \in R^n$, с конечной нормой

$$|f, L_p(R^n, \omega)| = \left(\int_{R^n} |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

При $\omega = 1$ $L_p(R^n, \omega)$ обозначим через $L_p(R^n)$ или короче через L_p , а норму $|f, L_p(R^n)|$ — через $\|f\|_p$.

Пусть K_α — заданная в R_0^n функция со следующими свойствами:

а) $K_\alpha(x) = \rho(x)^{\alpha-\gamma}$, $x \in R_0^n$, если $0 < \alpha < \gamma$;

б) в случае $\alpha = 0$, K_0 есть A_t -однородная функция степени $-\gamma$, т.е. $K_0(A_t x) = t^{-\gamma} K_0(x)$,

$$\int_{\Sigma} K_0(\bar{x}) |(A\bar{x}, \bar{x})| d\bar{x} = 0, \quad \int_0^1 \omega_{K_0}(t) t^{-1} dt < \infty,$$

где $\omega_{K_0}(t) = \sup\{|K_0(x) - K_0(y)|; x, y \in \Sigma, |x - y| \leq t\}$.

Справедлива следующая

Теорема 1.1. Пусть $0 < \alpha < \gamma$, $1 < p < \frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}$. Тогда оператор $f \rightarrow T_\alpha f = K_\alpha * f$ действует ограниченно из L_p в L_q , т.е.

$$\|T_\alpha f\|_q \leq C_{pq} \|f\|_p. \quad (1.1)$$

Теорема 1.2. Пусть $1 < p < \infty$, функция K_0 удовлетворяет условию б). Пусть также $f \in L_p(R^n)$ и при $\varepsilon > 0$

$$T_{0,\varepsilon} f(x) = (T_{0,\varepsilon} f)(x) = \int_{\rho(y) > \varepsilon} K_0(y) f(x - y) dy,$$

$$T_0 f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} T_{0,\varepsilon} f(x).$$

1. Тогда $T_0 f$ существует почти при всех $x \in R^n$ и $T_{0,\varepsilon} f$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ сходится в L_p к функции $T_0 f$ и

$$\|T_{0,\varepsilon} f\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad \varepsilon > 0,$$

где C_p не зависит от ε и f .

2. Пусть $T_0^* f(x) = (T_0^* f)(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |T_{0,\varepsilon} f(x)|$. Тогда

$$\|T_0^* f\|_p \leq C_p \|f\|_p. \quad (1.2).$$

Теорема 1.1 доказана в работе Нери [1], а теорема 1.2 является распространением на недиагональный случай хорошо известного диагонального случая (т.е. матрицы $A = \text{diag}\{l_1, \dots, l_n\}$) — анизотропного аналога теоремы Зигмунда-Кальдерона об ограниченности в L_p сингулярных интегралов.

Утверждение 1 доказано независимо Ривьере [2] и Гузманом [3].

Доказательство 2 проводится аналогично доказательству в диагональном случае $A_t = \text{diag} \{t^{a_1}, \dots, t^{a_n}\}$ с помощью утверждения 1 и следующих двух теорем.

Теорема 1.3 (см. [1]). Пусть $f \in L_p(R^n)$, $1 < p < \infty$,

$$Mf(x) = (Mf)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy.$$

Тогда

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p. \quad (1.3)$$

Теорема 1.4. Пусть $\varphi \in L_1(R^n)$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-\gamma} \varphi(A_{1/\varepsilon}x)$, $\int \psi(x) dx = a_0 < \infty$, $\psi(x) = \sup |\varphi(y)|$ при $\rho(y) \geq \rho(x)$. Пусть $f \in L_p(R^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда

$$\sup_{\varepsilon>0} |(\varphi_\varepsilon * f)(x)| \leq a_0 (Mf)(x), \quad x \in R^n. \quad (1.4)$$

Доказательство неравенства (1.4) аналогично доказательству в изотропном случае. При этом вместо сферических координат следует воспользоваться обобщенными сферическими координатами $(x = (\bar{x}, \rho)$, где $x = A_\rho \bar{x}$, $\rho = \rho(x)$, $x \in \Sigma$).

Теорема 1.5. Пусть $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, и пусть функция $\omega \geq 0$ удовлетворяет обобщенному условию Макензаупта $A_p(B)$ (см. [4,5])

$$\sup_{B \in \mathcal{B}} \left(|B|^{-1} \int_B \omega(x) dx \right) \left(|B|^{-1} \int_B \omega(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} < \infty,$$

где $B = \{B(x, r); x \in R^n, r > 0\}$. Если ядро K_0 удовлетворяет условию б), то при $f \in L_p(R^n, \omega)$ $T_0 f$ существует почти при всех $x \in R^n$ и имеет место неравенство

$$|T_0 f, L_p(R^n, \omega)| \leq C |f, L_p(R^n, \omega)|$$

с постоянной C , не зависящей от f .

Теорема 1.6. Пусть $0 < \alpha < \gamma$, $1 < p < \gamma/\alpha$ $q = \frac{\gamma p}{\gamma - \alpha p}$. Следующие условия эквивалентны:

1) существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\left(\int_{R^n} |T_\alpha f(x)|^q \omega(x)^{q/p} dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{R^n} |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{1/p}$$

для произвольного f с условием $\|f\omega^{1/p}\|_p < \infty$;

2) $\omega \geq 0$ удовлетворяет обобщенному условию Макензаупта-Уидена $A_{pq}(B)$ [4]: существует такая постоянная $C_1 > 0$, что для любого $B = B(x, r) \in \mathcal{B}$

$$\left(|B|^{-1} \int_B \omega(x)^{q/p} dx \right)^{p/q} \left(|B|^{-1} \int_B \omega(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} < C_1.$$

Теорема 1.5 анонсирована в [6].

Доказательства теорем 1.5 и 1.6 следуют рассуждениям работ [7,8,5] и опираются на оценки (1.1)–(1.3).

В случае, когда $\mathcal{B}$ — семейство n -мерных кубов с гранями, параллельными координатным осям, $A_p(\mathcal{B})$ совпадает с известным условием Макенхаупта $A_p(R^n)$, а $A_{pq}(\mathcal{B})$ с $A_{pq}(R^n)$.

В дальнейшем нами используется

Теорема 1.7. Пусть $1 \leq p \leq q < \infty$, $p' = p/(p-1)$ и $u(t)$, $v(t)$ — положительные на $(0, \infty)$ функции.

1. Для справедливости неравенства

$$\left(\int_0^\infty u(t) \left| \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \right|^q dt \right)^{1/q} \leq K_1 \left(\int_0^\infty |\varphi(t)|^p v(t) dt \right)^{1/p}$$

с постоянной K_1 , не зависящей от φ , необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty u(\tau) d\tau \right)^{p/q} \left(\int_0^t v(\tau)^{1-p'} d\tau \right)^{p-1} < \infty.$$

2. Для справедливости неравенства

$$\left(\int_0^\infty u(t) \left| \int_t^\infty \varphi(\tau) d\tau \right|^q dt \right)^{1/q} \leq K_2 \left(\int_0^\infty |\varphi(t)|^p v(t) dt \right)^{1/p}$$

с постоянной K_2 , не зависящей от φ , необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t u(\tau) d\tau \right)^{p/q} \left(\int_t^\infty v(\tau)^{1-p'} d\tau \right)^{p-1} < \infty.$$

Заметим, что теорема 1.7 при $1 \leq p = q < \infty$ была установлена Таленти и Томазелли, на случай $p < q$ этот результат был распространен Брэдли (соответствующие ссылки см. в [4]).

Будем обозначать через $\tilde{A}_{pq}(\gamma)$ множество пар весовых функций (ω, ω_1) , удовлетворяющих условиям $a_1)$ либо $b_1)$:

$a_1)$ ω, ω_1 — возрастающие функции на $(0, \infty)$ и

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \omega_1(\tau) \tau^{-1-\gamma q/p'} d\tau \right)^{p/q} \left(\int_0^{t/2} \omega(\tau)^{1-p'} \tau^{\gamma-1} d\tau \right)^{p-1} < \infty;$$

$b_1)$ ω, ω_1 — убывающие функции на $(0, \infty)$ и

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^{t/2} \omega_1(\tau) \tau^{\gamma-1} d\tau \right)^{p/q} \left(\int_t^\infty \omega(\tau)^{1-p'} \tau^{-1-\gamma p'/q} d\tau \right)^{p-1} < \infty.$$

Справедлива

Теорема 1.8. Пусть $1 < p < \infty$, ядро K_0 удовлетворяет условию б), а весовая пара (ω, ω_1) принадлежит классу $\tilde{A}_p(\gamma) \equiv \tilde{A}_{pp}(\gamma)$. Тогда при $f \in L_p(R^n, \omega)$ $T_0 f$ существует почти при всех $x \in R^n$ и имеет место неравенство

$$\int_{R^n} |T_0 f(x)|^p \omega_1(\rho(x)) dx \leq C \int_{R^n} |f(x)|^p \omega(\rho(x)) dx, \quad (1.5)$$

где постоянная C не зависит от f .

Следствие 1.1. Если $\omega(t)$ при $t > 0$ возрастает (убывает), а функция $\omega(t)t^{-\beta}$ убывает (возрастает) при некотором $\beta \in (0, \gamma(p-1))$ ($\beta \in (-\gamma, 0)$), то оператор T_0 ограничен в $L_p(R^n, \omega(\rho(x)))$.

Замечание 1.1. В случае $A = \text{diag} \{1, \dots, 1\}$ теорема 1.8 доказана в [9] (см. также [10]), а в случае $A = \text{diag} \{l_1, \dots, l_n\}$ — в [11, 12] (см. также [13]).

Замечание 1.2. Аналог теоремы 1.8 для сингулярных интегралов на группах Гейзенберга получен в [14].

Замечание 1.3. Отметим, что полученные условия в теореме 1.8, при которых оператор T_0 ограниченно действует из $L_p(R^n, \omega)$ в $L_p(R^n, \omega_1)$, являются наилучшими, так как существует ядро K_0 , удовлетворяющее условию б), для которого выполнимость оценки (1.5) для монотонных весов порождает условия $\tilde{A}_p(\gamma)$.

Доказательство теоремы 1.8. Пусть $f \in L_p(R^n, \omega)$ и ω, ω_1 — положительные возрастающие функции на $(0, \infty)$. Докажем, что $T_0 f(x)$ существует для почти всех $x \in R^n$. Для этого возьмем произвольное фиксированное $\tau > 0$ и представим функцию f в виде суммы $f_1 + f_2$, где

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \rho(x) > \tau/2, \\ 0, & \rho(x) \leq \tau/2, \end{cases} \quad f_2(x) = f(x) - f_1(x).$$

По условию ω — положительная возрастающая функция на $(0, \infty)$ и $f \in L_p(R^n, \omega)$, тогда $f_1 \in L_p(R^n)$. Следовательно, по теореме 1.2 $T_0 f_1$ существует для почти всех $x \in R^n$. Теперь покажем, что $T_0 f_2$ сходится абсолютно для всех x : $\rho(x) \geq \tau$. Заметим, что из условия б) следует, что $\omega_{K_0}(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$, т.е. функция K_0 непрерывна на единичной сфере Σ и, следовательно, $C(K_0) = \sup_{x \in \Sigma} |K(x)|$. Отсюда

$$|T_0 f_2(x)| \leq C(K_0) \int_{\rho(y) \leq \tau/2} \frac{|f(y)|}{\rho(x-y)^\gamma} dy \leq \left(\frac{2}{\tau}\right)^{\gamma/p} C(K_0) \int_{\rho(y) \leq \tau/2} \frac{|f(y)| \omega(\rho(y))^{1/p}}{\omega(\rho(y))^{1/p}} dy,$$

так как $\rho(x-y) \geq \rho(x) - \rho(y) \geq \tau/2$. Применяя далее неравенство Гельдера и переходя к обобщенным сферическим координатам, получим

$$|T_0 f_2(x)| \leq C \tau^{-\gamma/p} |f, L_p(R^n, \omega)| \left(\int_0^{\tau/2} \omega(t)^{1-p'} t^{\gamma-1} dt \right)^{1/p'}.$$

Последний интеграл по условию теоремы сходится, следовательно, $T_0 f_2$ сходится абсолютно для всех x : $\rho(x) \geq \tau$. Так как $R_0^n = \cup_{\tau>0} \{x; \rho(x) \geq \tau\}$, то из этих рассуждений вытекает существование $T_0 f(x)$ для почти всех $x \in R^n$.

Теперь оценим $|T_0 f, L_p(R^n, \omega_1)|$.

Пусть $\bar{\omega}_1$ — произвольная непрерывная возрастающая функция на $(0, \infty)$ такая, что $\bar{\omega}_1(t) \leq \omega_1(t)$, $\bar{\omega}_1(0) = \omega_1(0+)$ и $\bar{\omega}_1(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau + \bar{\omega}_1(0)$, $t \in (0, \infty)$ (существование таких $\bar{\omega}_1$ очевидно, например $\bar{\omega}_1(t) = \int_0^t \omega_1'(\tau) d\tau + \omega_1(0+) \leq \omega_1(t)$).

Отметим, что из условия $a_1)$ вытекает справедливость следующих соотношений:

$$\exists C_1 > 0, \quad \forall t > 0 \quad \omega_1(t) \leq C_1 \omega(t/2), \quad (1.6)$$

$$\exists C_2 > 0, \quad \forall t > 0 \quad \left(\int_t^\infty \varphi(\tau) \tau^{-\gamma(p-1)} d\tau \right) \left(\int_0^{t/2} \omega(\tau)^{1-p'} \tau^{\gamma-1} d\tau \right)^{p-1} \leq C_2. \quad (1.7)$$

Соотношение (1.6) следует из того, что

$$\int_t^\infty \omega_1(\tau) \tau^{-1-\gamma(p-1)} d\tau \geq C_1 \omega_1(t) t^{-\gamma(p-1)},$$

$$\left(\int_0^{t/2} \omega(\tau)^{1-p'} \tau^{\gamma-1} d\tau \right)^{p-1} \geq C \omega(t/2)^{-1} t^{\gamma(p-1)},$$

а (1.7) следует из следующих неравенств:

$$\frac{1}{\gamma(p-1)} \int_t^\infty \varphi(\tau) \tau^{-\gamma(p-1)} d\tau = \int_t^\infty \varphi(\tau) d\tau \int_\tau^\infty \lambda^{-1-\gamma(p-1)} d\lambda \leq$$

$$\leq \int_t^\infty \lambda^{-1-\gamma(p-1)} d\lambda \int_t^\lambda \varphi(\tau) d\tau \leq \int_t^\infty \omega_1(\tau) \tau^{-1-\gamma(p-1)} d\tau.$$

Имеем

$$|T_0 f, L_p(R^n, \bar{\omega}_1)| \leq \left(\int_{R^n} |T_0 f(x)|^p dx \int_0^{\rho(x)} \varphi(t) dt \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\bar{\omega}_1(0) \int_{R^n} |T_0 f(x)|^p dx \right)^{1/p} = A_1 + A_2.$$

Если $\omega(0+) > 0$, то $L_p(R^n, \omega(\rho(x))) \subset L_p(R^n)$, а если $\omega(0+) = 0$, то из $\bar{\omega}_1(t) \leq \omega_1(t) \leq C \omega(t/2)$ вытекает, что $\bar{\omega}_1(0) = 0$. Следовательно, если $\omega(0+) = 0$, то $A_2 = 0$.

Если $\omega(0+) > 0$, то $f \in L_p(R^n)$ и потому

$$A_2 \leq c \left(\bar{\omega}_1(0) \int_{R^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C \left(\int_{R^n} |f(x)|^p \omega_1(\rho(x)) dx \right)^{1/p}.$$

Теперь оценим A_1 :

$$A_1 \leq \left(\int_0^\infty \varphi(t) dt \int_{\rho(x) > t} |T_0 f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq A_{11} + A_{12},$$

где

$$A_{11}^p = \int_0^\infty \varphi(t) dt \int_{\rho(x) > t} \left| \int_{\rho(y) > t/2} K_0(x-y) f(y) dy \right|^p dx,$$

$$A_{12}^p = \int_0^\infty \varphi(t) dt \int_{\rho(x) > t} \left| \int_{\rho(y) < t/2} K_0(x-y) f(y) dy \right|^p dx.$$

Далее из соотношения

$$\int_{\rho(y) > t/2} |f(y)|^p dy \leq \frac{1}{\omega(t/2)} \int_{\rho(y) > t/2} |f(y)|^p \omega(\rho(y)) dy$$

вытекает, что $f \in L_p(\{y; \rho(y) > t\})$ для любого $t > 0$.

Поэтому если учесть (1.6), то в силу теоремы 1.2 имеем

$$\begin{aligned} A_{11} &\leq C \left(\int_0^\infty \varphi(t) dt \int_{\rho(x) > t/2} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} = C \left(\int_{R^n} |f(x)|^p dx \int_0^{2\rho(x)} \varphi(t) dt \right)^{1/p} \leq \\ &\leq C \left(\int_{R^n} |f(x)|^p \omega_1(2\rho(x)) dx \right)^{1/p} \leq C |f, L_p(R^n, \omega(\rho(x)))|. \end{aligned}$$

Оценим A_{12} . При $\rho(x) > t$, $\rho(y) < t/2$ имеет место $\frac{1}{2}\rho(x) \leq \rho(x-y) \leq \frac{3}{2}\rho(x)$, тогда

$$\begin{aligned} \int_{\rho(x) > t} \left| \int_{\rho(y) < t/2} K_0(x-y) f(y) dy \right|^p dx &\leq C(K_0) \int_{\rho(x) > t} \left(\int_{\rho(y) < t/2} \rho(x-y)^{-\gamma} |f(y)| dy \right)^p dx \leq \\ &\leq 2^{\gamma p} C(K_0) \int_{\rho(x) > t} \rho(x)^{-\gamma p} dx \left(\int_{\rho(y) < t/2} |f(y)| dy \right)^p. \end{aligned}$$

Перейдя к обобщенным сферическим координатам по формулам $x = A_\rho \bar{x}$, $\rho = \rho(x)$, $\bar{x} \in \Sigma$, получим

$$\int_{\rho(x) > t} \rho(x)^{-\gamma p} dx = \int_{\Sigma} |(A\bar{x}, \bar{x})| d\bar{x} \int_t^\infty \rho^{\gamma-1-\gamma p} d\rho = Ct^{\gamma-\gamma p}.$$

Подбирая $\alpha > \gamma + \gamma/p'$ и применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \int_{\rho(y) < t/2} |f(y)| dy &= \int_{\Sigma} |(A\bar{y}, \bar{y})| d\bar{y} \int_0^{t/2} \rho^{\gamma-\alpha-1} |f(A_\rho \bar{y})| d\rho \int_0^\rho s^{\alpha-1} ds = \\ &= \int_0^{t/2} s^{\alpha-1} ds \int_{s < \rho(y) < t/2} |f(y)| \rho(y)^{-\alpha} dy \leq \int_0^{t/2} s^{\alpha-1} ds \left(\int_{s \leq \rho(y) < t/2} |f(y)|^p \rho(y)^{-\gamma p} dy \right)^{1/p} \times \\ &\times \left(\int_{s < \rho(y) < t/2} \rho(y)^{(\gamma-\alpha)p'} dy \right)^{1/p'} \leq C \int_0^{t/2} s^{\gamma+\gamma/p'} ds \left(\int_{s < \rho(y) < t/2} |f(y)|^p \rho(y)^{-\gamma p} dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A_{12} \leq C \left\{ \int_0^\infty \varphi(2t) t^{-\gamma(p-1)} \left[\int_0^t s^{\gamma+\gamma/p'} \left(\int_{\rho(y) > s} |f(y)|^p \rho(y)^{-\gamma p} dy \right)^{1/p} ds \right]^p dt \right\}^{1/p}.$$

Учитывая (7) и теорему 1.7, имеем

$$\begin{aligned} A_{12} &\leq C \left[\int_0^\infty s^{\gamma p(1+1/p')} \left(\int_{\rho(y) > s} |f(y)|^p \rho(y)^{-\gamma p} dy \right) \omega(s) s^{-(\gamma-1)(p-1)} ds \right]^{1/p} = \\ &= C \left(\int_0^\infty s^{-1+\gamma p} \omega(s) ds \int_{\rho(y) > s} |f(y)|^p \rho(y)^{-\gamma p} dy \right)^{1/p} = \\ &= C \left(\int_{R^n} |f(y)|^p \rho(y)^{-\gamma p} dy \int_0^{\rho(y)} \omega(s) s^{-1+\gamma p} ds \right)^{1/p} \leq C \left(\int_{R^n} |f(y)|^p \omega(\rho(y)) dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Объединяя оценки A_1 и A_2 , получаем (1.5) для $\omega_1 = \bar{\omega}_1$. Отсюда в силу теоремы Фату о предельном переходе под знаком интеграла вытекает справедливость (1.5).

Наконец, в случае ω , ω_1 положительных убывающих функций доказательство проводится по схемам вышеизложенных рассуждений с учетом убывания весовых функций.

Близкими рассуждениями доказывается также аналог теоремы 1.8 для оператора T_α , $0 < \alpha < \gamma$. А именно справедлива

Т е о р е м а 1.9. Пусть $0 < \alpha < \gamma$, $1 < p < \frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{\gamma}$ и весовая пара (ω, ω_1) — монотонные положительные на $(0, \infty)$ функции. Для справедливости неравенства

$$\left(\int_{R^n} |T_\alpha f(x)|^q \omega_1(\rho(x)) dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{R^n} |f(x)|^p \omega(\rho(x)) dx \right)^{1/p} \quad (1.8)$$

необходимо и достаточно, чтобы весовая пара (ω, ω_1) удовлетворяла условию $\bar{A}_{pq}(\gamma)$.

З а м е ч а н и е 1.4. В случае $A = \text{diag} \{l_1, \dots, l_n\}$ теорема 1.9 доказана в [11, 12] (см. также [10]).

З а м е ч а н и е 1.5. Аналог теоремы 1.9 в случае однородных групп также справедлив (см. [15]).

2.

Целью разд. 2 является получение весовых теорем вложения для пространств С.Л.Соболева $W_p^l(\Omega; \omega_0, \dots, \omega_n)$, определенных на области Ω , граница которой является гладкой. С этой целью изучается поведение в весовых L_p -пространствах анизотропных интегральных операторов, возникающих при использовании интегральных представлений В.П.Ильина, О.В.Бесова (см. [16, с.83]). Полученные весовые оценки обобщают соответствующие результаты А.Ф.Кочарли [17], а также более ранние результаты С.В.Успенского [18] и частично результаты О.В.Бесова [19], П.И.Лизоркина [20], В.Г.Перепелкина [21].

Сначала приведем некоторые обозначения, определения и вспомогательные сведения.

Через $x = (x_1, \dots, x_n)$, y , z обозначаются точки n -мерного евклидова пространства R^n . Для мультииндекса с целочисленными компонентами будем, как правило, употреблять символы $k = (k_1, \dots, k_n)$, l , m .

Положим $D_j = \partial/\partial x_j$, $D^k = D_1^{k_1} \dots D_n^{k_n}$, $v^\lambda = (v^{\lambda_1}, \dots, v^{\lambda_n})$, $v > 0$, $xv^\lambda = (x_1 v^{\lambda_1}, \dots, x_n v^{\lambda_n})$, $xv^{-\lambda} = (x_1 v^{-\lambda_1}, \dots, x_n v^{-\lambda_n})$, $(k, \lambda) = \sum_{i=1}^n k_i \lambda_i$.

Пусть Ω — область n -мерного евклидова пространства вида

$$\Omega = \{x = (x', x_n); x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in R^{n-1}, \varphi(x') < x_n < \infty\}, \quad (2.1)$$

где функция φ , описывающая границу, удовлетворяет "анизотропному" условию Гельдера

$$|\varphi(x') - \varphi(y')|^{l_i} \leq M \sum_{i=1}^{n-1} |x_i - y_i|^{l_i} \quad (2.2)$$

(l_i — неотрицательные целые, $i = 1, \dots, n$).

Отметим, что если некоторые $l_j > l_n$, то легко видеть, что $\varphi(x')$ не зависит от x_j . В случае неравных l_i ($l_i \leq l_n$, $i = 1, \dots, n-1$) допускаются, например, области с вырожденными углами.

Как известно, область с границей, удовлетворяющей "анизотропному" условию Гельдера, удовлетворяет и так называемому условию рога, т.е. если x — произвольная точка области Ω , то $x + R(l) \subset \Omega$, где

$$R(l) = \{y; y_i > 0, 0 < a_i h < y_i^{l_i} < (a_i + \varepsilon)h, i = 1, \dots, n, 0 < h < r < \infty\},$$

$$x + R(l) = \{x + y; y \in R(l)\}.$$

Точнее, имеет место

Л е м м а 2.1 [17]. Пусть Ω имеет вид (2.1), рог

$$R(l) = \{y; y_i > 0, 0 < a_i h < y_i^{l_i} < (a_i + \varepsilon)h, i = 1, \dots, n, 0 < h < r\},$$

$$a_n > M \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + \varepsilon).$$

Тогда для произвольной точки $x \in \Omega$ $x + R(l) \subset \Omega$.

В дальнейшем будем предполагать, что параметры рога $R(l)$ выбраны таким образом, что для любого $x \in \Omega$ $x + R(l) \subset \Omega$.

Обозначим

$$\rho(x, \partial\Omega) = \inf\{\rho(x - y); y \in \partial\Omega\}, \quad x \in \Omega,$$

где

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^{l_i/l_n} \quad \left(\text{т.е. } A = \text{diag} \left\{ \frac{l_1}{l_n}, \dots, \frac{l_{n-1}}{l_n}, 1 \right\} \right).$$

Функцию $\rho(x, \partial\Omega)$ будем называть обобщенным или "анизотропным" расстоянием. Заметим, что при одинаковых l_i обобщенное расстояние эквивалентно обычному расстоянию до границы области.

Л е м м а 2.2 [17]. Пусть Ω имеет вид (2.1). Тогда для любой точки $x \in \Omega$ $\rho(x, \partial\Omega)$ эквивалентна $\pi(x) = x_n - \varphi(x')$; точнее,

$$\exists C_0 > 0, \quad \forall x \in \Omega \quad C_0 \pi(x) < \rho(x, \partial\Omega) < \pi(x). \quad (2.3)$$

Заметим, что в случае $\Omega = R_+^n \equiv \{x = (x', x_n) \in R^n; x_n > 0\}$ $C_0 = 1$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Будем говорить, что функция f , определенная на Ω , принадлежит весовому пространству $W_p^l(\Omega; \omega_0, \dots, \omega_n)$, если f имеет на Ω обобщенные по Соболеву производные $D_i^{l_i} f(x)$ [16], $i = 1, \dots, n$, и конечна норма

$$|f, W_p^l(\Omega; \omega_0, \dots, \omega_n)| = |f, L_p(\Omega, \omega_0)| + \sum_{i=1}^n |D_i^{l_i} f, L_p(\Omega, \omega_i)|.$$

Приведем интегральное представление функции через ее производные по рогу $R(l)$ из работы [16]:

$$f_\varepsilon(x) = f_r(x) + \sum_{i=1}^n \int_{\varepsilon}^r \int_{R^n} h^{-|\sigma|} \Phi_i(yh^{-\sigma}) D_i^{l_i} f(x+y) dy dh, \quad (2.4)$$

где $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_i = 1/l_i$, $i = 1, \dots, n$, $|\sigma| = \sum_{i=1}^n \sigma_i$, $h > 0$, $f_r(x) = r^{-|\sigma|} \int_{R^n} \Phi_0(yr^{-\sigma}) f(x+y) dy$ — усреднение функции f . Гладкие финитные ядра $\Phi_i \in C_0^\infty(R^n)$ сосредоточены в произвольном наперед заданном кубе из первого координатного угла и такие, что

$$\int_{R^n} \Phi_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ввиду указанной выше произвольности носителей Φ_i фактическое интегрирование в правой части (2.4) проводится лишь по точкам $y \in R(l)$.

Рассмотрим следующий интегральный оператор, играющий важную роль в теоремах вложения, получаемый на основе интегрального представления (2.4):

$$K_{\varepsilon r}^\alpha f(x) = \int_{x+R(l)} K_{\varepsilon r}^\alpha(y-x) f(y) dy, \quad (2.5)$$

где

$$K_{\varepsilon r}^\alpha(x) = \int_{\varepsilon}^r \Phi(xh^{-\sigma}) h^{-1-|\sigma|+\alpha} dh, \quad 0 < \varepsilon < r \leq \infty.$$

Теорема 2.1 [16]. Пусть носитель функции $\Phi \in C_0^\infty(R^n)$ содержится внутри первого координатного угла, $\int_{R^n} \Phi(x) dx = 0$, $f \in L_p(R^n)$, $1 < p \leq q < \infty$, $\alpha = |\sigma|(1/p - 1/q)$. Тогда оператор $f \rightarrow K_{\varepsilon r}^\alpha f$ задает ограниченное отображение L_p в L_q , причем $\|K_{\varepsilon r}^\alpha f\|_q \leq C_{pq} \|f\|_p$.

Теорема 2.2. Пусть Ω имеет вид (2.1), $1 < p \leq q < \infty$, $\alpha = |\sigma|(1/p - 1/q)$ и весовая пара монотонных функций $(\omega(\rho), \omega_1(\rho))$ (здесь $\omega(\rho) = \omega(\rho(x, \partial\Omega))$, $\omega_1(\rho) = \omega_1(\rho(x, \partial\Omega))$) удовлетворяет условию $a_2)$ либо условию $b_2)$:

$a_2)$ ω, ω_1 — возрастающие функции на $(0, \infty)$ и

$$\exists C > 0, \quad \forall \rho \in (0, \infty) \quad \omega_1(\rho)^{p/q} \leq C\omega(C_0, \rho);$$

$b_2)$ ω, ω_1 — убывающие функции на $(0, \infty)$ и

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^{C_0 t^{1/2}} \omega_1(\rho) d\rho \right)^{p/q} \left(\int_t^\infty \omega(\rho)^{1-p'} \rho^{-1-p'/q} d\rho \right)^{p-1} < \infty.$$

Тогда оператор $f \rightarrow K_{\varepsilon r}^{\alpha} f$ задает ограниченное отображение $L_p(\Omega, \omega)$ в $L_q(\Omega, \omega_1)$, причем

$$\left(\int_{\Omega} |K_{\varepsilon r}^{\alpha} f(x)|^q \omega_1(\rho(x, \partial\Omega)) dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \omega(\rho(x, \partial\Omega)) dx \right)^{1/p}. \quad (2.6)$$

Доказательство. Пусть $f \in L_p(\Omega, \omega)$, а $\omega(\rho) = \omega(\rho(x, \partial\Omega))$, $\omega_1(\rho) = \omega_1(\rho(x, \partial\Omega))$ — положительные возрастающие функции на $(0, \infty)$, удовлетворяющие условию a_2 .

Пусть $\bar{\omega}_1$ — произвольная непрерывная возрастающая функция на $(0, \infty)$ такая, что $\bar{\omega}_1(t) \leq \omega_1(t)$, $\bar{\omega}_1(0) \leq \omega_1(0+)$ и $\bar{\omega}_1(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau + \bar{\omega}_1(0)$, $t \in (0, \infty)$.

Оценим

$$\begin{aligned} |K_{\varepsilon r}^{\alpha} f, L_q(\Omega, \bar{\omega}_1)| &\leq \left(\int_{\Omega} |K_{\varepsilon r}^{\alpha} f(x)|^q dx \int_0^{\rho(x, \partial\Omega)} \varphi(\tau) d\tau \right)^{1/q} + \\ &+ \left(\bar{\omega}_1(0) \int_{\Omega} |K_{\varepsilon r}^{\alpha} f(x)|^q dx \right)^{1/q} = B_1 + B_2. \end{aligned}$$

Если $\omega(0+) > 0$, то $L_p(\Omega, \omega) \subset L_p(\Omega)$, а если $\omega(0+) = 0$, то из $\bar{\omega}_1(t) \leq \omega_1(t) \leq C\omega(C_0 t)^{q/p}$ вытекает, что $\bar{\omega}_1(0) = 0$. Следовательно, если $\omega(0+) = 0$, то $B_2 = 0$. Если же $\omega(0+) > 0$, то $f \in L_p(\Omega)$ и потому

$$\begin{aligned} B_2 &\leq C \bar{\omega}_1(0)^{1/q} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \omega_1 \left(\frac{1}{C_0} \rho(x, \partial\Omega) \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} \leq \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \omega(\rho(x, \partial\Omega)) dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

А теперь оценим B_1 . Нетрудно показать, что при $x \in \Omega$, $y \in R(l)$ $\pi(y) > \pi(x)$ (см. [17]). Если учесть, что вне рога $R(l)$ $K_{\varepsilon r}^{\alpha}(x)$ равна нулю, то в силу условия a_2 теоремы 2.1 и леммы 2.2 имеем

$$\begin{aligned} B_1 &= \left(\int_0^{\infty} \varphi(\tau) d\tau \int_{\rho(x, \partial\Omega) > \tau} |K_{\varepsilon r}^{\alpha} f(x)|^q dx \right)^{1/q} = \\ &= \left(\int_0^{\infty} \varphi(\tau) d\tau \int_{\pi(x) > \tau} \left| \int_{\pi(y) > \pi(x)} K_{\varepsilon r}^{\alpha}(y-x) f(y) dy \right|^q dx \right)^{1/q} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_0^\infty \varphi(\tau) d\tau \int_{\pi(x) > \tau} \left| \int_{\pi(y) > \tau} K_{\varepsilon r}^\alpha(y-x) f(y) dy \right|^q dx \right)^{1/q} \leq \\
&\leq C \left[\int_0^\infty \varphi(\tau) d\tau \left(\int_{\pi(x) > \tau} |f(x)|^p dx \right)^{q/p} \right]^{1/q} \leq \\
&\leq C \left[\int_\Omega |f(x)|^p \left(\int_0^{\pi(x)} \varphi(\tau) d\tau \right)^{p/q} dx \right]^{1/p} \leq \\
&\leq C \left(\int_\Omega |f(x)|^p \omega_1(\pi(x))^{p/q} dx \right)^{1/p} \leq C \left(\int_\Omega |f(x)|^p \omega_1 \left(\frac{1}{C_0} \rho(x, \partial\Omega) \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} \leq \\
&\leq C \left(\int_\Omega |f(x)|^p \omega(\rho(x, \partial\Omega)) dx \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Объединяя оценки B_1 и B_2 , получим (2.6) для $\omega_1 = \bar{\omega}_1$. Отсюда в силу теоремы Фату о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует справедливость (2.6).

Рассмотрим теперь случай, когда (ω, ω_1) удовлетворяет условию b_2).

Пусть $f \in L_p(\Omega, \omega)$, а $\bar{\omega}_1$ — произвольная непрерывная убывающая функция на $(0, \infty)$ такая, что $\bar{\omega}_1(t) \leq \omega_1(t)$, $\bar{\omega}_1(\infty) = \omega_1(\infty)$ и $\bar{\omega}_1(t) = \int_t^\infty \psi(\tau) d\tau + \bar{\omega}_1(\infty)$, $t \in (0, \infty)$ (существование таких $\bar{\omega}_1$ очевидно, например $\bar{\omega}_1(t) = \int_t^\infty (-\omega'_1(\tau)) d\tau + \omega_1(\infty) \leq \omega_1(t)$).

Отметим, что из условия b_2) вытекает справедливость следующих соотношений:

$$\exists C > 0, \quad \forall t \in (0, \infty) \quad \omega_1(C_0 t/2)^{p/q} \leq C \omega(t), \quad (2.7)$$

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^{C_0 t/2} \psi(\tau) \tau d\tau \right)^{p/q} \left(\int_t^\infty \omega(\tau)^{1-p'} \tau^{-1-p'/q} d\tau \right)^{p-1} < \infty. \quad (2.8)$$

Соотношение (2.7) следует из того, что

$$\int_0^{C_0 t/2} \omega_1(\rho) d\rho \geq \frac{C_0 t}{2} \omega_1\left(\frac{C_0 t}{2}\right), \quad \int_t^\infty \omega(\rho)^{1-p'} \rho^{-1-p'/q} d\rho \geq \frac{q}{p'} t^{-p'/q} \omega(t)^{1-p'},$$

а (2.8) следует из следующего неравенства:

$$\int_0^{C_0 t/2} \psi(\tau) \tau d\tau = \int_0^{C_0 t/2} \psi(\tau) d\tau \int_0^\tau d\rho = \int_0^{C_0 t/2} d\rho \int_\rho^{C_0 t/2} \psi(\tau) d\tau \leq \int_0^{C_0 t/2} \omega_1(\rho) d\rho.$$

Имеем

$$|K_{\varepsilon r}^\alpha f, L_q(\Omega, \bar{\omega}_1)| \leq \left(\int_{\Omega} |K_{\varepsilon r}^\alpha f(x)|^q dx \int_{\rho(x, \partial\Omega)}^{\infty} \psi(\tau) d\tau \right)^{1/q} + \\ + \left(\bar{\omega}_1(\infty) \int_{\Omega} |K_{\varepsilon r}^\alpha f(x)|^q dx \right)^{1/q} = B_3 + B_4.$$

Если $\omega(\infty) > 0$, то $L_p(\Omega, \omega) \subset L_p(\Omega)$, а если $\omega(\infty) = 0$, то из $\bar{\omega}_1(t) \leq \omega_1(t) \leq C\omega(2t/C_0)^{q/p}$ вытекает, что $\bar{\omega}_1(\infty) = 0$. Следовательно, если $\omega(\infty) = 0$, то $B_4 = 0$.

А если $\omega(\infty) > 0$, то $f \in L_p(\Omega)$ и потому

$$B_4 \leq C \bar{\omega}_1(\infty)^{1/q} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \omega(\rho(x, \partial\Omega)) dx \right)^{1/p}.$$

Теперь оценим B_3 .

$$B_3 \leq \left(\int_0^{\infty} \psi(\tau) d\tau \int_{\rho(x, \partial\Omega) < \tau} \left| \int_{\rho(y, \partial\Omega) < 2\tau/C_0} K_{\varepsilon r}^\alpha(y-x) f(y) dy \right|^q dx \right)^{1/q} + \\ + \left(\int_0^{\infty} \psi(\tau) d\tau \int_{\rho(x, \partial\Omega) < \tau} \left| \int_{\rho(y, \partial\Omega) > 2\tau/C_0} K_{\varepsilon r}^\alpha(y-x) f(y) dy \right|^q dx \right)^{1/q} = B_{31} + B_{32}.$$

Далее, из соотношения

$$\int_{\rho(y, \partial\Omega) < 2\tau/C_0} |f(y)|^p dy \leq \frac{1}{\omega(2\tau/C_0)} \int_{\rho(y, \partial\Omega) < 2\tau/C_0} |f(y)|^p \omega(\rho(y, \partial\Omega)) dy$$

вытекает, что $f \in L_p(\{y \in \Omega; \rho(y, \partial\Omega) < \tau\})$ для любого $\tau > 0$.

Поэтому если учесть (2.7), то в силу теоремы 2.1 и обобщенного неравенства Минковского имеем

$$B_{31} \leq C \left[\int_0^{\infty} \psi(\tau) \left(\int_{\rho(x, \partial\Omega) < 2\tau/C_0} |f(x)|^p dx \right)^{q/p} d\tau \right]^{1/q} \leq \\ \leq C \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p \left(\int_{\frac{1}{2}C_0\rho(x, \partial\Omega)}^{\infty} \psi(\tau) d\tau \right)^{p/q} dx \right]^{1/p} \leq \\ \leq C \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \omega_1 \left(\frac{C_0}{2} \rho(x, \partial\Omega) \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} \leq C |f, L_p(\Omega, \omega)|.$$

Оценим B_{32} :

$$B_{32} \leq C \left[\int_0^\infty \psi(\tau) d\tau \int_{\rho(x, \partial\Omega) < \tau} \left(\int_{\rho(y, \partial\Omega) > 2\tau/C_0} |f(y)| \rho(x-y)^{\alpha-|\sigma|} dy \right)^q dx \right]^{1/q} =$$

$$= \left(\int_0^\infty \psi(\tau) A^q(\tau) d\tau \right)^{1/q}.$$

Далее, в силу леммы 2.2 имеем

$$A(\tau) \leq \left[\int_{\pi(x) < \tau} \left(\int_{\pi(y) > 2\tau} |f(y)| \rho(x-y)^{\alpha-|\sigma|} dy \right)^q dx \right]^{1/q} \leq$$

$$\leq \left[\int_{x_n < \varphi(x') + \tau} dx' dx_n \left(\int_{R^{n-1}} dy' \int_{2\tau}^\infty |f(y', \eta_n + \varphi(y'))| \times \right. \right.$$

$$\left. \times \rho(x' - y', \eta_n + \varphi(y') - x_n)^{\alpha-|\sigma|} d\eta_n \right)^q \Big]^{1/q},$$

здесь $\rho(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^{1/\sigma_i}$.

Делая замену $\eta' = y'$, $\xi' = x'$ и $\xi_n = x_n - \varphi(x')$, имеем

$$A(\tau) = \left[\int_{R^{n-1}} d\xi' \int_0^\tau d\xi_n \left(\int_{R^{n-1}} d\eta' \int_{2\tau}^\infty |f(\eta', \eta_n + \varphi(\eta'))| \times \right. \right.$$

$$\left. \times \rho(\xi' - \eta', \eta_n + \varphi(\eta') - \xi_n - \varphi(\xi'))^{\alpha-|\sigma|} d\eta_n \right)^q \Big]^{1/q}.$$

Легко показать (см. [17]), что

$$\rho(\eta' - \xi', \eta_n + \varphi(\eta') - \xi_n - \varphi(\xi')) \geq C \rho(\eta - \xi).$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, получим

$$A(\tau) \leq C \left[\int_0^\tau d\xi_n \int_{R^{n-1}} d\xi' \left(\int_{2\tau}^\infty d\eta_n \int_{R^{n-1}} |f(\eta', \eta_n + \varphi(\eta'))| \rho(\eta - \xi)^{\alpha-|\sigma|} d\eta' \right)^q \right]^{1/q} \leq$$

$$\leq C \left[\int_0^\tau \left(\int_{2\tau}^\infty B(\xi_n, \eta_n) d\eta_n \right)^q d\xi_n \right]^{1/q},$$

где

$$B(\xi_n, \eta_n) = \left[\int_{R^{n-1}} \left(\int_{R^{n-1}} |f(\eta', \eta_n + \varphi(\eta'))| \rho(\eta - \xi)^{\alpha-|\sigma|} d\eta' \right)^q d\xi' \right]^{1/q}.$$

Применяя неравенство Юнга при условии $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$, имеем

$$\begin{aligned} B(\xi_n, \eta_n) &\leq \left(\int_{R^{n-1}} |f(\eta', \eta_n + \varphi(\eta'))|^p d\eta' \right)^{1/p} \left(\int_{R^{n-1}} \rho(\eta', \eta_n - \xi_n)^{(\alpha - |\sigma|)r} d\eta' \right)^{1/r} = \\ &= f_1(\eta_n) \left(\int_{R^{n-1}} \rho(\eta', \eta_n - \xi_n)^{-|\sigma|} d\eta' \right)^{1/r} \leq C |\eta_n - \xi_n|^{-1/r} f_1(\eta_n). \end{aligned}$$

Тогда, если учесть, что при $0 < \xi_n < \tau$, $\eta_n > 2\tau$ $|\xi_n - \eta_n| > \frac{1}{2}\eta_n$, имеем

$$\begin{aligned} A(\tau) &\leq C \left[\int_0^\tau \left(\int_{2\tau}^\infty |\eta_n - \xi_n|^{-1/r} f_1(\eta_n) d\eta_n \right)^q d\xi_n \right]^{1/q} \leq \\ &\leq C \tau^{1/q} \int_{2\tau}^\infty \eta_n^{-1/r} f_1(\eta_n) d\eta_n. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$B_{32} \leq C \left[\int_0^\infty \psi(\tau) \tau \left(\int_{2\tau/C_0}^\infty \eta_n^{-\frac{1}{r}} f_1(\eta_n) d\eta_n \right)^q d\tau \right]^{1/q}.$$

Учитывая (2.8) и теорему 1.7, имеем

$$\begin{aligned} B_{32} &\leq C \left(\int_0^\infty \eta_n^{-\frac{r}{r-1}} f_1^p(\eta_n) \omega(\eta_n) \eta_n^{p/r} d\eta_n \right)^{1/p} = \\ &= C \left(\int_0^\infty \int_{R^{n-1}} |f(\eta', \eta_n + \varphi(\eta'))|^p \omega(\eta_n) d\eta_n d\eta' \right)^{1/p} = C \left(\int_{\Omega} |f(y)|^p \omega(\pi(y)) dy \right)^{1/p} \leq \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} |f(y)|^p \omega(\rho(y, \partial\Omega)) dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Объединяя оценки B_3 и B_4 , получаем (2.6) для $\omega_1 = \bar{\omega}_1$. Отсюда в силу теоремы Фату о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует справедливость (2.6).

Теорема 2.2 доказана.

С помощью теоремы 2.2 доказывается

Т е о р е м а 2.3 [11, 12]. Пусть Ω имеет вид (2.1), весовые пары $(\omega_j(\rho(x, \partial\Omega)), \omega(\rho(x, \partial\Omega)))$, $j = 0, 1, \dots, n$, удовлетворяют условиям теоремы 2.2.

Тогда при $k = (k_1, \dots, k_n)$, $l = (l_1, \dots, l_n)$, $(k, 1/l) \leq 1$, $(k + 1/p - 1/q, 1/l) = 1$, $1 < p \leq q < \infty$ имеет место непрерывное вложение

$$D^k W_p^l(\Omega; \omega_0, \dots, \omega_n) \hookrightarrow L_q(\Omega, \omega).$$

При этом справедливо неравенство

$$|D^k f, L_q(\Omega, \omega)| \leq C |f, W_p^l(\Omega; \omega_0, \dots, \omega_n)|$$

с постоянной C , не зависящей от f .

Доказательство. Применяя к обеим частям (2.4) операцию дифференцирования D^k , находим

$$D^k f_\varepsilon(x) = D^k f_r(x) + (-1)^{|k|} \sum_{i=1}^n \int_{\varepsilon}^r \int_{R^n} v^{-|\sigma| - (k, \sigma)} \Phi_i^{(k)}(yv^{-\sigma}) D_i^{l_i} f(x+y) dy dv. \quad (2.9)$$

В силу теоремы 2.2 имеем

$$\left| \int_{\varepsilon}^r \int_{R^n} v^{-|\sigma| - (k, \sigma)} \Phi_i^{(k)}(yv^{-\sigma}) D_i^{l_i} f(x+y) dy dv, L_q(\Omega, \omega) \right| \leq$$

$$\leq C |D_i^{l_i} f, L_p(\Omega, \omega_i)|, \quad i = 1, \dots, n,$$

а также

$$|D^k f_r, L_q(\Omega, \omega)| \leq C |f, L_p(\Omega, \omega_0)|.$$

Таким образом, объединяя оценки, получаем

$$|D^k f_\varepsilon, L_q(\Omega, \omega)| \leq C |f, W_p^l(\Omega, \omega_0, \dots, \omega_n)|.$$

Для завершения доказательства теоремы устанавливаются два факта: во-первых, показывается сходимость $D^k f_\varepsilon$ к некоторому элементу из $L_q(\Omega, \omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$; во-вторых, доказывается, что этот предельный элемент является обобщенной производной $D^k f$ функции f , к которой сходятся f_ε при $\varepsilon \rightarrow 0+$ (см. [17]).

Таким образом,

$$|D^k f, L_q(\Omega, \omega)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |D^k f_\varepsilon, L_q(\Omega, \omega)| \leq C |f, W_p^l(\Omega, \omega_0, \dots, \omega_n)|$$

и теорема доказана.

Отметим, что в случае $\Omega = R_0^n$ и весов $\omega, \omega_0, \dots, \omega_n$, зависящих только от $\rho(x) = \sum_{j=1}^n |x_j|^{1/a_j}$ ($a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, $|a| = \sum_{j=1}^n a_j$), применяя теоремы 1.8 и 1.9, в случае $A = \text{diag} \{a_1, \dots, a_n\}$ мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2.4. Пусть весовые функции $\omega, \omega_0, \dots, \omega_n$ зависят от $\rho(x) = \sum_{j=1}^n |x_j|^{1/a_j}$, а весовые пары (ω_j, ω) , $j = 0, 1, \dots, n$, принадлежат классам

$\tilde{A}_{pq}(|a|)$. Тогда при $k = (k_1, \dots, k_n)$, $a_i = 1/l_i$, $i = 1, \dots, n$, $l = (l_1, \dots, l_n)$, $(k, 1/l) \leq 1$, $(k + 1/p - 1/q, 1/l) = 1$, $1 < p \leq q < \infty$ имеет место непрерывное вложение

$$D^k W_p^l(R^n; \omega_0, \dots, \omega_n) \hookrightarrow L_q(R^n, \omega).$$

Заметим, что теорема 2.4 в случае $p = q$, $\omega(\rho) = \omega_0(\rho) = \dots = \omega_n(\rho) = \rho(x)^\beta$, $-|a| < \beta < |a|(p-1)$ доказана Ю.С.Никольским [22], а в случае $p = q$, $\omega(\rho) = \omega_0(\rho) = \dots = \omega_n(\rho)$ и при некоторых дополнительных требованиях автором [23].

Отметим, что в случае $\Omega = R_{m,s}^{+n} = \{(x_1, \dots, x_n); x_j > 0, j = m, m+1, \dots, s\}$ и весов ω , $\omega_0, \dots, \omega_n$, зависящих только от $\sum_{i=\bar{m}}^{\bar{s}} |x_i|^{1/a_i}$, $1 \leq m \leq \bar{m} \leq \bar{s} \leq s \leq n$, также получены весовые теоремы вложения для пространств $W_p^l(\Omega, \omega_1, \dots, \omega_n)$. При этом доказана ограниченность в весовых L_p -пространствах анизотропных интегральных операторов вида

$$(K_\alpha f)(x) = \int_{R_{m,s}^{+n}} K_\alpha(y) f(x+y) dy, \quad 0 \leq \alpha < |a|, \quad (2.10)$$

где K_α — функция, определенная в $R_{m,s}^{+n}$, удовлетворяющая условиям:

$$\bar{a}) \exists C > 0, \forall x \in R_{m,s}^{+n} |K_\alpha(x)| \leq C \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{1/a_i} \right)^{\alpha-|a|}, \text{ если } 0 < \alpha < |a|;$$

$\bar{b})$ в случае $\alpha = 0$ K_0 есть $A_t = \text{diag} \{t^{a_1}, \dots, t^{a_n}\}$ -однородная функция степени $-|a|$, т.е.

$$K_0(t^a x) = t^{-|a|} K_0(x), \quad \int_{\Sigma_{m,s}^+} K_0(x) \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 dx = 0, \quad \int_0^1 \omega_{K_0}(t) t^{-1} dt < \infty.$$

Здесь

$$\Sigma_{m,s}^+ = \Sigma \cap R_{m,s}^{+n}, \quad \omega_{K_0}(t) = \sup\{|K_0(x) - K_0(y)|; x, y \in \Sigma_{m,s}^+, |x - y| \leq t\}$$

и интеграл (2.10) следует понимать в смысле главного значения. Эти результаты обобщают соответствующие результаты С.В.Успенского [18], Т.А.Тимана [24].

В случае $m = s = n$, т.е. $R_{m,s}^{+n} = R_+^n$, приведем один из результатов.

Т е о р е м а 2.5. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{|a|}$, ядро K_α удовлетворяет либо условию $\bar{a})$, либо $\bar{b})$ и весовая пара (ω, ω_1) удовлетворяет либо условию $a_2)$, либо $b_2)$ при условии $C_0 = 1$. Тогда имеет место неравенство

$$\left(\int_{R_+^n} |K_\alpha f(x)|^q \omega_1(x_n) dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{R_+^n} |f(x)|^p \omega(x_n) dx \right)^{1/p}. \quad (2.11)$$

С л е д с т в и е 2.1. Оператор $f \rightarrow K_\alpha f$, $0 \leq \alpha < |a|$, действует ограниченно из $L_p(R_+^n, e^{x_n^\beta})$ в $L_q(R_+^n, e^{\frac{\beta}{p} x_n^\beta})$ при $1 < p \leq q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{|a|}$, $\beta > 0$.

С л е д с т в и е 2.2. Оператор $f \rightarrow K_\alpha f$, $0 \leq \alpha < |a|$, действует ограниченно из $L_p(R_+^n, \omega(x_n))$ в $L_q(R_+^n, \omega(x_n)^{\frac{q}{p}})$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{|a|}$, $1 < p \leq q < \infty$, для любых возрастающих функций ω .

Для степенного веса $\omega(x_n) = x_n^\beta$, $\beta > 0$, следствие 2.2 при $p = q$, $\alpha = 0$, т.е. для сингулярного интеграла $K_0 f$, получено в [18]. По-видимому, для весов экспоненциального роста ограниченность сингулярного интегрального оператора $f \rightarrow K_0 f$ в весовых L_p -пространствах впервые была доказана в [13] (см. также [11,12]).

Отметим, что теорема 2.3, в частности, положительно отвечает на один из вопросов проф. Х.Трибеля [25] о том, можно ли получить весовые теоремы вложения для весов экспоненциального роста.

3.

Пусть $R_+^{n+1} = \{(x, t); x \in R^n, t > 0\}$, $A = \text{diag} \{1, \dots, 1, m\}$, $[x, t]_m = (|x|^{2m} + t^2)^{1/2m}$, $m \in \mathbb{N}$, "параболическое" ядро $K(x, t) = G(xt^{-1/m})t^{-1-n/m}$, $G \in C(R^n) \cap L(R^n)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_{R^n} G(x) dx = 0 \quad (3.1)$$

и для некоторого λ , $0 < \lambda < 1$,

$$\int_{R^n} (1 + |x|^\lambda)[|G(x)| + |\nabla G(x)|] dx = 0, \quad (3.2)$$

где $\nabla G(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} G(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} G(x) \right)$.

Рассмотрим введенный Джонсом [26] параболический сингулярный интеграл (ПСИ) вида

$$Kf(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{t-\varepsilon} \int_{R^n} K(x-y, t-\tau) f(y, \tau) dy d\tau.$$

Ограниченность в L_p оператора $f \rightarrow Kf$ доказана в [26,27].

В случае, когда весовые функции ω , ω_1 зависят от $[x, t]_m$, $\gamma = n + m$ и весовая пара (ω, ω_1) принадлежит классу $\tilde{A}_p(n+m)$, неравенство (1.5) справедливо для ПСИ Kf . Это утверждение вытекает как следствие из теоремы 1.8.

Также справедлива

Т е о р е м а 3.1 (см. [28,29]). Пусть $1 < p < \infty$, ядро $K(x, t)$ удовлетворяет условиям (3.1), (3.2) и весовая пара (ω, ω_1) удовлетворяет либо условиям a_3), либо b_3):

а₃) ω, ω_1 — возрастающие на $(0, \infty)$ функции и

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \omega_1(\tau) \tau^{-p} d\tau \right) \left(\int_0^{t/2} \omega(\tau)^{1-p'} d\tau \right)^{p-1} < \infty;$$

б₃) ω, ω_1 — убывающие на $(0, \infty)$ функции и

$$\exists C > 0, \quad \forall t \in (0, \infty) \quad \omega_1(t) \leq C\omega(t).$$

Тогда неравенство

$$\int_{R_+^{n+1}} |Kf(x, t)|^p \omega_1(t) dx dt \leq C \int_{R_+^{n+1}} |f(x, t)|^p \omega(t) dx dt \quad (3.3)$$

справедливо с постоянной C , не зависящей от f .

С л е д с т в и е 3.1 [29]. Пусть $\omega_1 = \omega \in \Lambda_\beta = \{\omega; \omega \uparrow, \omega(t)t^{-\beta} \downarrow\}$, $0 \leq \beta < p-1$, или $\omega_1 = \omega \in \bar{\Lambda}_\beta = \{\omega; \omega \downarrow, \omega(t)t^{-\beta} \uparrow\}$, $\beta < 0$. Тогда неравенство (3.3) справедливо.

С л е д с т в и е 3.2. Если $\omega_1 = \omega$ — любая убывающая функция на $(0, \infty)$, то неравенство (3.3) справедливо.

З а м е ч а н и е 3.1. Результат, вытекающий, в частности, из следствия 3.2 о том, что оператор $f \rightarrow Kf$ ограниченно действует в $L_p(R_+^{n+1}, t^{-\beta})$ при $\beta < 0$, является новым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in L_p(R_+^{n+1}, \omega)$, а ω, ω_1 — положительные убывающие на $(0, \infty)$ функции и удовлетворяют условию б₃). Тогда $Kf(x, t)$ существует почти для всех $(x, t) \in R_+^{n+1}$ (см. теорему 1.8).

Пусть $\tilde{\omega}_1$ — произвольная непрерывная убывающая функция на $(0, \infty)$ такая, что $\tilde{\omega}_1(t) \leq \omega_1(t)$, $\tilde{\omega}_1(\infty) = \omega_1(\infty)$ и $\tilde{\omega}_1(t) = \int_t^\infty \psi(\tau) d\tau + \tilde{\omega}_1(\infty)$, $t \in (0, \infty)$.

Оценим $|Kf, L_p(R_+^{n+1}, \tilde{\omega}_1)|$:

$$\begin{aligned} |Kf, L_p(R_+^{n+1}, \tilde{\omega}_1)| &= \left(\int_{R_+^{n+1}} |Kf(x, t)|^p \tilde{\omega}_1(t) dx dt \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left(\int_{R_+^{n+1}} |Kf(x, t)|^p dx dt \int_t^\infty \psi(\tau) d\tau \right)^{1/p} + \left(\tilde{\omega}_1(\infty) \int_{R_+^{n+1}} |Kf(x, t)|^p dx dt \right)^{1/p} = A + B. \end{aligned}$$

Если $\omega(\infty) > 0$, то $L_p(R_+^{n+1}, \omega) \subset L_p(R_+^{n+1})$, а если $\omega(\infty) = 0$, то из $\tilde{\omega}_1(t) \leq \omega_1(t) \leq C\omega(t)$ вытекает, что $\tilde{\omega}_1(\infty) = 0$. Следовательно, если $\omega(\infty) = 0$, то $B = 0$.

А если $\omega(\infty) > 0$, то $f \in L_p(R_+^{n+1})$ и потому

$$B \leq C \tilde{\omega}_1(\infty)^{1/p} \left(\int_{R_+^{n+1}} |f(x, t)|^p dx dt \right)^{1/p} \leq C \left(\int_{R_+^{n+1}} |f(x, t)|^p \omega(t) dx dt \right)^{1/p}.$$

Далее, если учесть, что при $0 < t < \tau$ $0 < \lambda < t \Rightarrow 0 < \lambda < \tau$, то в силу условия б₃) и ограниченности в L_p оператора $f \rightarrow Kf$ имеем

$$\begin{aligned} A^p &= \int_0^\infty \psi(\tau) d\tau \int_{R^n} \left| \int_0^\tau \int_{R^n} K(x-y, t-\lambda) f_\tau(y, \lambda) dy d\lambda \right|^p dx dt \leq \\ &\leq C \int_0^\infty \psi(\tau) d\tau \int_{R_+^{n+1}} |f_\tau(x, t)|^p dx dt = \int_0^\infty \psi(\tau) d\tau \int_{R^n} \int_0^\tau |f(x, t)|^p dx dt = \\ &= C \int_{R_+^{n+1}} |f(x, t)|^p dx dt \int_t^\infty \psi(\tau) d\tau \leq C \int_{R_+^{n+1}} |f(x, t)|^p \omega(t) dx dt. \end{aligned}$$

Здесь $f_\tau(x, t) = f(x, t) \chi(\{(x, t); 0 < t < \tau, x \in R^n\})$, $\chi(X)$ — характеристическая функция множества X .

Объединяя оценки A и B , получим (3.3) для $\omega_1 = \tilde{\omega}_1$. Отсюда в силу теоремы Фату о предельном переходе под знаком интеграла Лебега вытекает справедливость (3.3).

В случае, когда ω, ω_1 удовлетворяют условию а₃), рассуждениями, аналогичными рассуждениям из доказательства теоремы 1.8, получим неравенство (3.3).

Параболический потенциал $H_\alpha \varphi$, $\alpha > 0$, введенный в [31], определяется в образах Фурье равенством

$$F[H_\alpha \varphi](\xi, \tau) = (|\xi|^2 + i\tau)^{-\alpha/2} F[\varphi](\xi, \tau)$$

(явное выражение $H_\alpha \varphi$ см. ниже (3.4)). Этот потенциал, являющийся по существу отрицательной степенью дифференциального оператора $-\Delta_x + \partial/\partial t$, возникает при исследовании уравнений типа теплопроводности [1, 2].

В работах [32, 33] доказана ограниченность действующего из $L_p(R_+^{n+1})$ в $L_q(R_+^{n+1})$ параболического потенциала

$$H_\alpha \varphi(x, t) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{R_+^{n+1}} \tau^{(\alpha-n-2)/2} e^{-|y|^2/4\tau} \varphi(x-y, t-\tau) dy d\tau \quad (3.4)$$

при условии $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+2}$, $0 < \alpha < \frac{n+2}{p}$.

Из теоремы 1.9, в частности, следует

Т е о р е м а 3.2. Пусть $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n+2}{p}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+2}$, весовые функции монотонны и зависят от $[x, t] = (|x|^4 + t^2)^{1/4}$. Тогда для справедливости неравенства

$$\left(\int_{R_+^{n+1}} |H_\alpha \varphi(x, t)|^q \omega_1([x, t]) dx dt \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{R_+^{n+1}} |\varphi(x, t)|^p \omega([x, t]) dx dt \right)^{1/p}$$

необходимо и достаточно, чтобы весовая пара (ω, ω_1) принадлежала классу $\tilde{A}_{pq}(n+2)$.

Справедлива также

Т е о р е м а 3.3. Пусть $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n+2}{p}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+2}$ и весовая пара (ω, ω_1) удовлетворяет условию либо а₄), либо б₄) :

а₄) ω, ω_1 — возрастающие функции на $(0, \infty)$ и

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \omega_1(\tau) \tau^{-1-q/p'} d\tau \right)^{p/q} \left(\int_0^{t/2} \omega(\tau)^{1-p'} d\tau \right)^{p-1} < \infty;$$

б₄) ω, ω_1 — убывающие функции на $(0, \infty)$ и

$$\exists C > 0, \quad \forall t \in (0, \infty) \quad \omega_1(t)^{p/q} \leq C \omega(t).$$

Тогда

$$\left(\int_{R_+^{n+1}} |H_\alpha \varphi(x, t)|^q \omega_1(t) dx dt \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{R_+^{n+1}} |\varphi(x, t)|^p \omega(t) dx dt \right)^{1/p}.$$

Теперь займемся обращением и описанием параболических потенциалов (3.4) с плотностями из весовых L_p -пространств.

Известно [34], что обращение параболического потенциала основывается на представлении

$$T_\varepsilon^\alpha \varphi(x, t) = \int_{R_+^{n+1}} W(y, \tau) \mathcal{K}_{l, \alpha}(\tau) \varphi(x - \sqrt{\varepsilon} y, t - \varepsilon \tau) dy d\tau,$$

где $W(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp(-|y|^2/4t)$ — ядро Гаусса-Вейерштрасса,

$$\mathcal{K}_{l, \alpha}(t) = (\varkappa(\alpha, l) \Gamma(1 + \alpha) t)^{-1} \sum_{j=0}^l (-1)^j C_l^j (t - j)_+^\alpha, \quad l > \alpha > 0;$$

$$\varkappa(\alpha, l) = \int_0^\infty (1 - e^{-t})^l t^{1-\alpha} dt, \quad t_+^\lambda = \begin{cases} t^\lambda, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

С помощью техники, разработанной С.Г.Самко и его учениками (см. [34]), а также в силу теоремы 3.3 имеем утверждения.

Теорема 3.4. Пусть $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n+2}{p}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+2}$ и весовые функции ω , ω_1 монотонны и зависят от $[x, t] = (|x|^4 + t^2)^{1/4}$. Если $f = H_\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p(R_+^{n+1}, \omega)$, $(\omega, \omega_1) \in \tilde{A}_{pq}(n+2)$, то $\varphi = T^\alpha f \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon^\alpha f$.

Обозначим

$$H^\alpha[L_p(R_+^{n+1}, \omega)] = \{f; f = H_\alpha \varphi, \varphi \in L_p(R_+^{n+1}, \omega)\}, \quad 1 < p < \frac{n+2}{\alpha}.$$

Теорема 3.5. Пусть $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n+2}{p}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+2}$, весовые функции ω , ω_1 монотонны и зависят от $[x, t]$. Функция f принадлежит пространству $H^\alpha[L_p(R_+^{n+1}, \omega)]$, $(\omega, \omega_1) \in \tilde{A}_{pq}(n+2)$ тогда и только тогда, когда

$$f \in L_q(R_+^{n+1}, \omega_1), \quad T^\alpha f \in L_p(R_+^{n+1}, \omega).$$

Теорема 3.6. Пусть $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n+2}{p}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+2}$, весовые функции зависят от $[x, t]$, $(\omega, \omega_1) \in \tilde{A}_{pq}(n+2)$. Для того чтобы функция f принадлежала пространству $H^\alpha[L_p(R_+^{n+1}, \omega)]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f \in L_q(R_+^{n+1}, \omega_1), \quad |T_\varepsilon^\alpha f, L_p(R_+^{n+1}, \omega)| \leq C,$$

где C не зависит от ε .

Поступило в октябре 1992 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Neri U. Anisotropic Sobolev theorems // Ann. Univ. Ferrara. Sez.7. 1978, Vol.24. P.89-98.
2. Riviere N.M. Singular integrals and multiplier operators // Ark. math. 1971. bd.9, N2. s.243-278.
3. Guzman D. Singular integral operators with generalized homogeneity // Rev. Acad. cienc. Madrid. 1970. Vol.64. P.77-137.
4. Дьячкин Е.М., Осилецкер Б.П. Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1983. Т.21. С.42-129. (Итоги науки и техники).
5. Кокилашвили В.М. Максимальные функции и сингулярные интегралы в весовых функциональных пространствах // Тр. Тбил. мат. ин-та им. А.М.Размадзе. 1985. Т.80. С.114.
6. Гулиев В.С. Двухвесовые L_p -неравенства для сингулярных интегралов на однородных группах // Линейные операторы в функциональных пространствах: Тез. докл. Сев.-Кавказ. конф. Грозный, 1989. С.11-45.
7. Coifman R.R., Fefferman C. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integral // Stud. math. 1974. Vol.15, N3. P.241-250.
8. Розман И.М., Соловников В.А. Оценки в весовых нормах L_p для сингулярных интегралов с анизотропными ядрами // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1985. Т.147. С.124-137.
9. Гусейнов Е.Г. Сингулярные интегралы в пространствах функций, суммируемых с монотонным весом // Мат. сб. 1987. Т.137, №1. С. 28-44.
10. Абдуллаев С.К. О некоторых классах интегральных операторов в пространствах суммируемых функций // ДАН СССР. 1985. Т.283, №4. С.777-780.
11. Гулиев В.С. О некоторых классах анизотропных интегральных операторов и весовых теоремах вложения в области с негладкой границей // ДАН СССР. 1989. Т.304, №6. С.1289-1293.

12. Гүлиев В.С. Весовые теоремы вложения для некоторых областей //Сингулярные интегральные операторы. Баку, 1989. С.24–35.
13. Абдуллаев С.К., Гүлиев В.С. О некоторых классах сингулярных интегралов и их приложениях в весовых теоремах вложения в области с негладкой границей //Сингулярные интегральные операторы. Баку, 1986. С.16–26.
14. Гүлиев В.С. Об ограниченности сингулярных интегральных операторов на группе Гейзенберга в весовых обобщенно-гельдеровых и весовых L_p -пространствах //ДАН СССР. 1991. Т.316, №2. С.274–278.
15. Гүлиев В.С. Двухвесовые L_p -оценки для некоторых операторов на однородных группах Ли //Современные проблемы теории функций: Всесоюз. пк.-конф. Баку, 1989. С.33–34.
16. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 180 с.
17. Кочарли А.Ф. Некоторые весовые теоремы вложения в области с негладкой границей //Тр. МИАН СССР. 1974. Т.131. С.128–146.
18. Успенский С.В. О смешанных производных, суммируемых с весом //Дифференц. уравнения. 1967. Т.73, №1. С.139–154.
19. Бесов О.В. Весовые оценки смешанных производных в области //Тр. МИАН СССР. 1980. Т.156. С.16–23.
20. Лизоркин П.И. Оценка смешанных и промежуточных производных в весовых L_p -нормах //Тр. МИАН СССР. 1980. Т.156. С.130–142.
21. Перепелкин В.Г. Интегральные представления функций, принадлежащих весовым классам С.Л.Соболева в областях и некоторые приложения. Ч. 1,2 //Сиб. мат. журн. 1976. Т.17. С.119–140; 318–330.
22. Никольский С.М. О сингулярных интегральных операторах в весовых пространствах //Тр. МИАН СССР. 1969. Т.105. С.190–200.
23. Гүлиев В.С. Исследование анизотропного сингулярного оператора: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Баку, 1983.
24. Тимаев Т.А. О сингулярных интегральных преобразованиях в весовых L_p -пространствах //ДАН СССР. 1969. Т.184, №2. С.292–295.
25. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
26. Jones B.F. A class of singular integrals //Amer. J. Math. 1964. Vol.84. P.441–462.
27. Fabes E.B., Hewitt J.E., Riviere N.M. Singular integrals and hydrodynamic potentials //Amer. J. Math. 1977. Vol.99, N3. P.601–625.
28. Гүлиев В.С. Параболические сингулярные интегральные операторы в пространствах суммируемых функций //Сингулярные интегральные операторы. Баку, 1987. С.54–59.
29. Гүлиев В.С. Двухвесовые неравенства для параболических сингулярных интегралов //Всесоюз. конф. по теории функций. Саратов, 1988. С.77–79.
30. Гүлиев В.С. Об ограниченности параболического сингулярного интегрального оператора в весовых L_p -пространствах //Деп. в Аз. НИИТИ 20.03.86. №481–Аз.
31. Jones B.F. Lipschitz spaces and heat equation //J. Math. and Mech. 1968. Vol.18. P.379–410.
32. Bagby R. Lebesgue spaces of parabolic potentials //Ill. J. Math. 1971. Vol.5. P.610–634.
33. Gopal Rao U.R. A characterization of parabolic function spaces //Amer. J. Math. 1977. Vol.93. P.985–993.
34. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.