

УДК 517.518

Двухвесовые неравенства для интегральных операторов в L_p -пространствах банаховозначных функций и их приложения

©2003 г. В. С. Гулиев¹, Р. А. Бандалиев²

Поступило в марте 2003 г.

Получены двухвесовые неравенства слабого и сильного типа в пространствах $L_p(\Omega_k; B)$ для интегральных операторов, возникающих на основе интегрального представления Ильина–Бесова в случае радиальных весов.

В работе установлены двухвесовые L_p -оценки с радиальными весами для интегральных операторов типа потенциала и для сингулярных интегральных операторов. С помощью этих теорем получены весовые теоремы вложения для анизотропных пространств С.Л. Соболева банаховозначных функций $W_{p, \omega_0, \dots, \omega_n}^l(\mathbb{R}^n; B)$. Установлены также весовые оценки для интегральных операторов, возникающих на основе интегрального представления Ильина–Бесова для областей в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию l -рога. С помощью этих теорем получены весовые теоремы вложения для пространств банаховозначных функций $W_{p, \omega_0, \dots, \omega_n}^l(\Omega_k; B)$, $0 \leq k \leq n-1$, определенных на области Ω_k , граница которой не является гладкой. В частности, из этой теоремы получены теоремы вложения для весовых анизотропных пространств Соболева $W_{p, \omega_0, \dots, \omega_n}^l(\Omega_k; B)$, $0 \leq k \leq n-1$, для весов экспоненциального роста. Эти весовые оценки в случае монотонных радиальных весов и для области Ω_{n-1} были получены в [1].

Полученные весовые оценки обобщают соответствующие результаты Ю.С. Никольского [2], А.Ф. Кочарли [3], а также более ранние результаты С.В. Успенского [4] и частично результаты О.В. Бесова [5], П.И. Лизоркина [6], В.Г. Перепелкина [7].

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x = (x', x'')$, $x' = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$, $k = 1, \dots, n-1$, $\mathbb{R}_+^n = \{x: x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$, $\mathbb{R}_{++}^n = \{x: x \in \mathbb{R}^n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$; $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $S^{n-1} = \{x: x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$. Через $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $m = (m_1, \dots, m_n)$ обозначим мультииндексы с целочисленными неотрицательными компонентами, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $(\alpha, m) = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть $\rho(x)$ — положительное при $x \neq 0$ решение уравнения, заданного неявно равенством $\sum_{i=1}^n x_i^2 \rho^{-2a_i} = 1$. Отметим, что $\rho(x)$ эквивалентно $\sum_{i=1}^n |x_i|^{1/a_i}$, т.е. при некоторых положительных c_1, c_2 (см. [18])

$$c_1 \rho(x) \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^{1/a_i} \leq c_2 \rho(x).$$

Предположим, что $K: \mathbb{R}_0^n \rightarrow \mathbb{R}$ — анизотропное сингулярное ядро, удовлетворяющее условиям

$$1) \quad K(t^a x) \equiv K(t^{a_1} x_1, \dots, t^{a_n} x_n) = t^{-|a|} K(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_0^n,$$

где $|a| = \sum_{i=1}^n a_i$;

¹Институт математики и механики Национальной академии наук Азербайджана, Баку, Азербайджан.
E-mail: vagif@guliyev.com

²Институт математики и механики Национальной академии наук Азербайджана, Баку, Азербайджан.

$$2) \quad \int_{S^{n-1}} K(x) \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 d\sigma(x) = 0;$$

3) существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|K(x-y) - K(x)| \leq Cw\left(\frac{\rho(y)}{\rho(x)}\right) \rho(x)^{-|a|} \quad \text{при} \quad \rho(x) > 2\rho(y),$$

где C не зависит от x, y и функция $w: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ неубывающая, $w(0) = 0$, $w(2s) \leq C_1 w(s)$, $C_1 \geq 1$, для любого $s > 0$ и $\int_0^1 w(t) \frac{dt}{t} < \infty$.

Для вектор-функций $f: \mathbb{R}^n \rightarrow B$ рассмотрим анизотропный сингулярный интеграл (АСИ)

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y) dy := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho(x-y) > \varepsilon} K(x-y)f(y) dy,$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера–Лебега, а предел — в смысле сходимости по норме пространства B .

Будем говорить, что банахово пространство B ζ -выпукло (или выпукло по Буркхольдеру [8]), если существует симметричная функция $\zeta(a, b)$ на $B \times B$, выпуклая по каждой из переменных и удовлетворяющая условиям

$$\zeta(0, 0) > 0, \quad \zeta(a, b) \leq \|a + b\|_B \quad \text{при} \quad \|a\|_B = \|b\|_B = 1.$$

Пусть ω — положительная измеримая функция, заданная в $\mathbb{R}^n$. Через $L_{p,\omega}(G; B)$ будем обозначать пространство сильно измеримых на области $G \subset \mathbb{R}^n$ B -значных функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{p,\omega}(G; B)} = \left(\int_G \|f(x)\|_B^p \omega(x) dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Говорят, что $\nu(x) \geq 0$ принадлежит $A_p(G)$, $1 < p < \infty$, если

$$\sup_E \left(|E|^{-1} \int_{E \cap G} \nu(x) dx \right) \left(|E|^{-1} \int_{E \cap G} \nu(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} < \infty,$$

где супремум берется по всем шарам $E \subset \mathbb{R}^n$.

Кроме того, $\nu \in A_1(G)$, если

$$\frac{1}{|E|} \int_{E \cap G} \nu(x) dx \leq C \operatorname{ess\,inf}_{x \in E \cap G} \nu(x),$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от шаров $E \subset \mathbb{R}^n$.

Лемма 1 [9, 10]. Пусть $0 \leq \alpha < |a|$, $1 \leq p < \frac{|a|}{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{|a|}$, $\beta \geq 1$, $\varphi(\rho(x)) \in A_{1+\frac{q}{p}}(\mathbb{R}^n)$, и пусть $u(t)$ и $u_1(t)$ — неубывающие неотрицательные функции на $(0, \infty)$, $\omega = u\varphi$, $\omega_1 = u_1\varphi$. Предположим, что весовая пара (ω, ω_1) удовлетворяет следующему условию:

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \omega_1(\tau) \tau^{-1-\frac{|a|q}{p'}} d\tau \right)^{p/q} \left(\int_0^{t/2} \left(\varphi^{-\frac{\alpha p}{|a|}}(\tau) \omega(\tau) \right)^{1-p'} \tau^{|a|-1} d\tau \right)^{p-1} < \infty.$$

Тогда существует положительная постоянная C такая, что для любого $t > 0$ имеет место следующее неравенство:

$$u_1^{p/q}(\beta t) \leq C u(t).$$

Лемма 2 [9, 10]. Пусть $0 \leq \alpha < |a|$, $1 \leq p < \frac{|a|}{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{|a|}$, $\beta \geq 1$, $\varphi(\rho(x)) \in A_{1+\frac{q}{p}}(\mathbb{R}^n)$, и пусть $u(t)$ и $u_1(t)$ — невозрастающие неотрицательные функции на $(0, \infty)$, $\omega = u\varphi$, $\omega_1 = u_1\varphi$. Предположим, что весовая пара (ω, ω_1) удовлетворяет следующему условию:

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^{t/2} \omega_1(\tau) \tau^{|a|-1} d\tau \right)^{p/q} \left(\int_t^\infty \left(\varphi^{-\frac{\alpha p}{|a|}}(\tau) \omega(\tau) \right)^{1-p'} \tau^{-1-\frac{|a|p'}{q}} d\tau \right)^{p-1} < \infty.$$

Тогда существует положительная постоянная C такая, что для любого $t > 0$ имеет место следующее неравенство:

$$u_1^{p/q} \left(\frac{t}{\beta} \right) \leq C u(t).$$

В случае $\varphi = 1$ эти леммы установлены в [1].

Теорема 1. Пусть B — ζ -выпуклая банахова решетка и ядро K удовлетворяет условиям 1)–3), $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $f \in L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n; B)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда сингулярный интеграл $Tf(x)$ существует в смысле сходимости по норме B для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$ и при $1 < p < \infty$ ограничен из $L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n; B)$ в $L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n; B)$, т.е.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tf(x)\|_B^p \omega(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_B^p \omega(x) dx, \quad 1 < p < \infty, \quad (1)$$

а при $p = 1$

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : \|Tf(x)\|_B > \lambda\}} \omega(x) dx \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_B \omega(x) dx, \quad (2)$$

где положительная постоянная C не зависит от f .

В числовом варианте теорема 1 для изотропного случая, т.е. при $a_1 = \dots = a_n = 1$, доказана в [11], а в анизотропном случае в [12]. Теорема 1 в изотропном случае для ζ -выпуклых банаховых пространств доказана в [13].

Теорема 2. Пусть B — ζ -выпуклая банахова решетка, $1 < p < \infty$, ядро $K(x)$ удовлетворяет условиям 1)–3). Предположим, что u , u_1 — положительные неубывающие функции на $(0, \infty)$, $\varphi(\rho(x)) \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega = u\varphi$ и $\omega_1 = u_1\varphi$.

Если весовая пара (ω, ω_1) удовлетворяет условию

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \omega_1(\tau) \tau^{-1-|a|(p-1)} d\tau \right) \left(\int_0^{t/2} \omega^{1-p'}(\tau) \tau^{|a|-1} d\tau \right)^{p-1} < \infty,$$

то сингулярный интеграл $Tf(x)$ существует в смысле сходимости по норме B для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$ и существует $C > 0$ такое, что для любого $f \in L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n; B)$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tf(x)\|_B^p \omega_1(\rho(x)) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_B^p \omega(\rho(x)) dx. \quad (3)$$

Теорема 3. Пусть B — ζ -выпуклая банахова решетка, $1 < p < \infty$, ядро $K(x)$ удовлетворяет условиям 1)–3). Предположим, что $u(t)$, $u_1(t)$ — положительные невозрастающие функции на $(0, \infty)$, $\varphi(\rho(x)) \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega = u\varphi$ и $\omega_1 = u_1\varphi$.

Если весовая пара (ω, ω_1) удовлетворяет условию

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^{t/2} \omega_1(\tau) \tau^{|a|-1} d\tau \right) \left(\int_t^\infty \omega^{1-p'}(\tau) \tau^{-1-\frac{|a|}{p-1}} d\tau \right)^{p-1} < \infty,$$

то сингулярный интеграл $Tf(x)$ существует в смысле сходимости по норме B для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$ и имеет место неравенство (3).

Замечание 1. Отметим, что для числовых функций теоремы 2 и 3 доказаны при $\varphi = 1$ в [1], а для радиальных $\varphi \in A_p(\mathbb{R}^n)$ в [9].

Пусть

$$\Omega_k = \left\{ x: x' \in \mathbb{R}^k, \varphi_i(x') < x_i < \infty, i = k+1, \dots, n \right\}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (4)$$

$$\Omega_0 = \left\{ x: x \in \mathbb{R}^n, x_i^{(0)} < x_i < \infty, i = 1, \dots, n \right\}, \quad (5)$$

$\Gamma_k = \{x: x' \in \mathbb{R}^k, x'' = \overline{\varphi}(x')\}$, $1 \leq k \leq n-1$, где вектор-функция $\overline{\varphi}(x') = (\varphi_{k+1}(x'), \dots, \varphi_n(x'))$, $k = 1, \dots, n-1$, удовлетворяет анизотропному условию Гёльдера

$$\rho(\overline{\varphi}(x') - \overline{\varphi}(y')) \leq M\rho(x' - y') \quad \forall x', y' \in \mathbb{R}^k,$$

$\rho(x') := \rho(x', 0'')$, $\rho(x'') = \rho(0', x'')$, $\eta(x') := \eta(x', 0'')$, $\eta(x'') = \eta(0', x'')$, $\rho(x, \Gamma_k) = \inf_{y \in \Gamma_k} \rho(x - y)$, $1 \leq k \leq n-1$. В случае $k = 0$ $\rho(x, \Gamma_0) = \rho(x - x^{(0)})$, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ — фиксированная точка в $\mathbb{R}^n$. При $x^{(0)} = (0, \dots, 0)$ $\Omega_0 = \mathbb{R}_{++}^n$.

Положим

$$\eta(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^{1/a_i}, \quad \pi_0(x) = \eta(x - x^{(0)}), \quad \pi_k(x) = \eta(x'' - \overline{\varphi}(x')), \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Пусть $b = (b_1, \dots, b_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$, $0 < b_i < c_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$. Множество

$$\mathcal{R}(1/a) = \left\{ y: y_i > 0, b_i h < y_i^{1/a_i} < c_i h, i = 1, \dots, n, 0 < h < \infty \right\}$$

называется $1/a$ -рогом.

В [2] показано, что область Ω_k , $0 \leq k \leq n-1$, удовлетворяет условию $1/a$ -рога, т.е. существует рог $\mathcal{R}(1/a)$ такой, что (арифметическая сумма)

$$\Omega_k + \mathcal{R}(1/a) = \Omega_k,$$

а для Ω_k вида (4) или (5) $\rho(x, \Gamma_k)$ эквивалентно $\pi_k(x)$ в Ω_k , точнее говоря,

$$\exists c', c'' > 0 \quad \forall x \in \Omega_k \quad c' \pi_k(x) \leq \rho(x, \Gamma_k) \leq c'' \pi_k(x).$$

Пусть K_α — заданная в $\mathbb{R}_0^n$ числовая функция со следующими свойствами:

- а) при $0 < \alpha < |a|$ $K_\alpha(x) = \rho(x)^{\alpha-|a|}$, если $x \in \text{supp } K_\alpha = \overline{\mathcal{R}(1/a)}$,
- б) при $\alpha = 0$

$$K_0(t^a x) = t^{-|a|} K_0(x), \quad \int_{\mathcal{R}(1/a) \cap S^{n-1}} K_0(x) \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 d\sigma(x) = 0$$

и существуют такие постоянные $C > 0$, $C_1 \geq 1$, что

$$|K_0(x - y) - K_0(x)| \leq C w\left(\frac{\rho(y)}{\rho(x)}\right) \rho(x)^{-|a|} \quad \text{при} \quad \rho(x) > 2\rho(y),$$

где функция $w: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ не убывает, $w(0) = 0$, $w(2s) \leq C_1 w(s)$ для любого $s > 0$ и $\int_0^1 w(t) \frac{dt}{t} < \infty$.

Рассмотрим интегральный оператор

$$K_\alpha f(x) = \int_{\mathcal{R}(1/a)} K_\alpha(y) f(x+y) dy.$$

Теорема 4. Пусть $0 < \alpha < |a|$, $1 < p < \frac{|a|}{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{|a|}$. Если $\omega \in A_{1+\frac{q}{p}}(\Omega_k)$, $1 \leq k \leq n-1$, то существует положительная постоянная C такая, что для любого $f \in L_{p,\omega}(\Omega_k; B)$ имеет место следующее неравенство:

$$\left(\int_{\Omega_k} \|K_\alpha(f\omega^{\alpha/|a|})(x)\|_B^q \omega(x) dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p \omega(x) dx \right)^{1/p}.$$

Если к тому же B — ζ -выпуклая банахова решетка, то неравенство справедливо также при $1 < p = q < \infty$, $\alpha = 0$.

Для числовых функций при $\Omega_k = \mathbb{R}^n$ теорема 4 при $0 < \alpha < |a|$ в изотропном случае была доказана в [14], а в анизотропном в [15], а при $\alpha = 0$ в изотропном случае теорема 4 была доказана в [11], а в анизотропном в [12]. Для ζ -выпуклых банаховых пространств теорема 4 в изотропном случае при $\alpha = 0$ получена в [13].

В банаховозначном случае при $0 < \alpha < |a|$ доказательство теоремы 4 проводится аналогично числовому случаю, а при $\alpha = 0$ непосредственно вытекает из теоремы 1.

Теорема 5. Пусть B — банахово пространство, Ω_k имеет вид (4) или (5), $1 < p \leq q < \infty$, $\alpha = |a|(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, $\varphi(\rho(x, \Gamma_k)) \in A_{1+\frac{q}{p}}(\Omega_k)$.

Предположим, что весовая пара $(\omega(t), \omega_1(t))$ удовлетворяет одному из следующих условий:

а) ω — произвольная весовая функция на $(0, \infty)$, $\omega_1 = u_1 \varphi$, где u_1 — неубывающая функция, и

$$\forall \beta \geq 1 \quad \exists C > 0: \quad u_1(\beta t)^{p/q} \leq C \omega(t)/\varphi(t) \quad \forall t > 0;$$

б) $\omega = u \varphi$, $\omega_1 = u_1 \varphi$ и

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^{t/2} \omega_1(\tau) \tau^{|a''|-1} d\tau \right)^{p/q} \left(\int_t^\infty (\varphi(\tau)^{-\alpha p/|a|} \omega(\tau))^{1-p'} \tau^{-1-|a''|p'/q} d\tau \right)^{p-1} < \infty,$$

где $|a''| = \sum_{i=k+1}^n a_i$, u, u_1 — невозрастающие функции на $(0, \infty)$, $\varphi(\rho(x, \Gamma_k))$ эквивалентна $\varphi(\pi_k(x))$.

Тогда если $1 < p < q < \infty$, то оператор $f \rightarrow K_\alpha f$ ограничен из $L_{p,\omega(\rho(x, \Gamma_k))}(\Omega_k; B)$ в $L_{q,\omega_1(\rho(x, \Gamma_k))}(\Omega_k; B)$, т.е.

$$\left(\int_{\Omega_k} \|K_\alpha(f(\cdot)[\varphi(\rho(\cdot, \Gamma_k))]^{\alpha/|a|})(x)\|_B^q \omega_1(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p \omega(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/p}. \quad (6)$$

Если к тому же B — ζ -выпуклая банахова решетка, то неравенство (6) справедливо при $1 < p = q < \infty$, т.е. АСИ-оператор $f \rightarrow K_0 f$ ограничен из $L_{p,\omega(\rho(x, \Gamma_k))}(\Omega_k; B)$ в $L_{p,\omega_1(\rho(x, \Gamma_k))}(\Omega_k; B)$.

Доказательство. Пусть $f \in L_{p,\omega(\rho(x,\Gamma_k))}(\Omega_k; B)$, и предположим, что весовая пара (ω, ω_1) удовлетворяет условию а).

Неравенство (6) достаточно доказать для тех неубывающих функций, для которых имеет место следующее представление:

$$u_1(t) = u_1(0) + \int_0^t \psi(\tau) d\tau,$$

где $u_1(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} u_1(t)$ и $\psi(t)$ — неотрицательная функция на $(0, \infty)$.

Действительно, для неубывающих на $(0, +\infty)$ функций $u_1(t)$ существует последовательность абсолютно непрерывных функций $\varphi_n(t)$ таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = u_1(t)$ п.в., $\varphi_n(t) \leq u_1(t)$, $\varphi_n(0) = u_1(0)$, функции $\varphi_n(t)$ не убывают и, кроме того, $\varphi_n(t) = \int_0^t \psi_n(\tau) d\tau + \varphi_n(0)$, где $\psi_n(t)$ — неотрицательные функции на $(0, \infty)$. Отсюда с применением теоремы Фату получается справедливость оценки (6) для неубывающих функций (см., например, [1, 9, 16, 17]).

Оценим левую сторону неравенства (6). Имеем

$$\begin{aligned} & \left\| K_\alpha \left(f(\cdot) [\varphi(\rho(\cdot, \Gamma_k))]^{\alpha/|a|} \right) \right\|_{L_{q,\omega_1(\rho(x,\Gamma_k))}(\Omega_k; B)} \leq \\ & \leq \left(u_1(0) \int_{\Omega_k} \left\| K_\alpha \left(f(\cdot) [\varphi(\rho(\cdot, \Gamma_k))]^{\alpha/|a|} \right) (x) \right\|_B^q \varphi(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/q} + \\ & + \left(\int_{\Omega_k} \left\| K_\alpha \left(f(\cdot) [\varphi(\rho(\cdot, \Gamma_k))]^{\alpha/|a|} \right) (x) \right\|_B^q \left(\int_0^{\rho(x,\Gamma_k)} \psi(\tau) d\tau \right) \varphi(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/q} = \\ & = A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Если $u_1(0) = 0$, то $A_1 = 0$, а если $u_1(0) \neq 0$, то по теореме 4, а также по условию а) имеем

$$\begin{aligned} A_1 & \leq C_1 u_1^{1/q}(0) \left(\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p \varphi(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/p} \leq C_1 \left(\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p \varphi(\rho(x, \Gamma_k)) u_1^{p/q}(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/p} \leq \\ & \leq C_2 \left(\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p \omega(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Оценим A_2 . Легко доказывается, что при $x \in \Omega_k$, $y \in x + \mathcal{R}(1/a)$ $\pi_k(y) > \pi_k(x)$, $1 \leq k \leq n-1$. Обозначим через $\varphi \circ \rho$ суперпозицию $\varphi(\rho(x, \Gamma_k))$ и $d\mu(x) := \varphi(\rho(x, \Gamma_k)) dx$. Положим

$$\Omega_k(\tau) := \{x \in \Omega_k : \rho(x, \Gamma_k) > \tau\}.$$

Тогда

$$A_2 = \left(\int_0^\infty \psi(\tau) d\tau \int_{\Omega_k(\tau)} \left\| K_\alpha \left(f(\varphi \circ \rho)^{\alpha/|a|} \right) (x) \right\|_B^q d\mu(x) \right)^{1/q}.$$

Поскольку

$$\Omega_k(\tau) \subset \{x \in \Omega_k : \pi_k(x) > \tau/c''\} := \Pi_k\left(\frac{\tau}{c''}\right)$$

и $\Pi_k(\tau/c'')$ удовлетворяет условию $1/a$ -рога, то по теореме 4

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \left(\int_0^\infty \psi(\tau) d\tau \int_{\Pi_k(\tau/c'')} d\mu(x) \left\| \int_{\Pi_k(\pi_k(x))} K_\alpha(y-x) f(y) \varphi^{\alpha/|a|}(\rho(y, \Gamma_k)) dy \right\|_B^q \right)^{1/q} = \\ &= \left(\int_0^\infty \psi(\tau) d\tau \int_{\Pi_k(\tau/c'')} d\mu(x) \left\| \int_{\Pi_k(\tau/c'')} K_\alpha(y-x) f(y) \varphi^{\alpha/|a|}(\rho(y, \Gamma_k)) dy \right\|_B^q \right)^{1/q} \leq \\ &\leq C \left[\int_0^\infty \psi(\tau) d\tau \left(\int_{\Pi_k(\tau/c'')} \|f(x)\|_B^p d\mu(x) \right)^{q/p} \right]^{1/q} \leq \end{aligned}$$

(применяя неравенство Минковского)

$$\begin{aligned} &\leq C \left[\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p \left(\int_0^{c''\pi_k(x)} \psi(\tau) d\tau \right)^{p/q} d\mu(x) \right]^{1/p} \leq \\ &\leq C \left[\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p (u_1(c''\pi_k(x)))^{p/q} \varphi(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right]^{1/p} \leq \end{aligned}$$

(применяя условие а) при $\beta = c''/c'$)

$$\leq C \left(\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p \omega(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/p}.$$

Утверждение теоремы при выполнении условия а) доказано.

Теперь рассмотрим случай, когда (ω, ω_1) удовлетворяет условию б).

Поступая так же, как и выше, эту часть теоремы достаточно доказать для тех невозрастающих функций, для которых имеет место следующее представление:

$$u_1(t) = u_1(\infty) + \int_t^\infty \psi(\tau) d\tau,$$

где $u_1(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u_1(t)$ и $\psi(t) \geq 0$, $t \in (0, \infty)$.

Имеем

$$\begin{aligned} &\left\| K_\alpha \left(f(\varphi \circ \rho)^{\alpha/|a|} \right) \right\|_{L_{q, \omega_1(\rho(x, \Gamma_k))}(\Omega_k; B)} \leq \\ &\leq \left(\int_{\Omega_k} \left\| K_\alpha \left(f(\varphi \circ \rho)^{\alpha/|a|} \right) (x) \right\|_B^q u_1(\infty) \varphi(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/q} + \\ &+ \left(\int_{\Omega_k} \left\| K_\alpha \left(f(\varphi \circ \rho)^{\alpha/|a|} \right) (x) \right\|_B^q \varphi(\rho(x, \Gamma_k)) \left(\int_{\rho(x, \Gamma_k)}^\infty \psi(t) dt \right) dx \right)^{1/q} = \\ &= B_1 + B_2. \end{aligned}$$

Если $u_1(\infty) = 0$, то $B_1 = 0$. Однако если $u_1(\infty) > 0$, то по теореме 4 имеем

$$B_1 \leq C u_1^{1/q}(\infty) \left(\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p \varphi(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/p} \leq C \left(\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p \varphi(\rho(x, \Gamma_k)) u_1^{p/q}(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/p}.$$

Используя лемму 2, получим

$$B_1 \leq C \left(\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p \omega(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/p}.$$

Оценим теперь B_2 :

$$\begin{aligned} B_2^q &= \int_0^\infty \psi(\tau) \left(\int_{\rho(x, \Gamma_k) < \tau} \|K_\alpha(f(\varphi \circ \rho)^{\alpha/|a|})(x)\|_B^q \varphi(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right) d\tau \leq \\ &\leq \int_0^\infty \psi(\tau) \left(\int_{\rho(x, \Gamma_k) < \tau} \varphi(\rho(x, \Gamma_k)) \left\| \int_{\rho(y, \Gamma_k) < 2\tau/c_0} K_\alpha(y-x) f(y) \varphi^{\alpha/|a|}(\rho(y, \Gamma_k)) dy \right\|_B^q dx \right) d\tau + \\ &+ \int_0^\infty \psi(\tau) \left(\int_{\rho(x, \Gamma_k) < \tau} \varphi(\rho(x, \Gamma_k)) \left\| \int_{\rho(y, \Gamma_k) \geq 2\tau/c_0} K_\alpha(y-x) f(y) \varphi^{\alpha/|a|}(\rho(y, \Gamma_k)) dy \right\|_B^q dx \right) d\tau = \\ &= B_{21}^q + B_{22}^q. \end{aligned}$$

Назовем множество

$$\overline{\Omega}_k(\tau) := \{x \in \Omega_k : \rho(x, \Gamma_k) < \tau\}$$

“полосой”. Эти множества, вообще говоря, не удовлетворяют условию $1/a$ -рога. Отметим, что теорема 4 верна для “полос” с равномерной оценкой оператора, поэтому аналогично оценке A_2 получим

$$B_{21} \leq C \left(\int_0^\infty \psi(\tau) \left(\int_{\overline{\Omega}_k(2\tau/c_0)} \|f(x)\|_B^p d\mu(x) \right)^{q/p} \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p \left[u \left(\frac{c_0 \rho(x, \Gamma_k)}{2} \right) \right]^{p/q} d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Условие б) отличается от интегрального условия в лемме 2, так как в двух местах из трех вместо $|a|$ стоит $|a''| < |a|$. Из условия б) можно аналогично лемме 2 заключить, что

$$\left(u_1 \left(\frac{t}{\beta} \right) \right)^{p/q} \leq C u(t) \quad \text{при } \beta = 2/c_0.$$

Следовательно,

$$B_{21} \leq C \left(\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p \omega(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/p}.$$

Теперь оценим B_{22} . Так как $\varphi(\rho(x, \Gamma_k))$ эквивалентно $\varphi(\pi_k(x))$, то

$$\begin{aligned} B_{22}^q &\leq C \int_0^\infty \psi(\tau) d\tau \int_{\rho(x, \Gamma_k) < \tau} \varphi(\rho(x, \Gamma_k)) \left(\int_{\rho(y, \Gamma_k) \geq 2\tau/c_0} \frac{\|f(y)\|_B \varphi^{\alpha/|a|}(\rho(y, \Gamma_k))}{\rho(x-y)^{|a|-\alpha}} dy \right)^q dx = \\ &= \int_0^\infty \psi(\tau) A^q(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Пусть $\bar{\Pi}_k(\tau) := \{x \in \Omega_k : \pi_k(x) < \tau\}$ и $c_0 \leq 1/c''$. Тогда $\pi_k(x) \geq c_0 \rho(x, \Gamma_k)$ и $\Omega_k(\frac{2\tau}{c_0}) \subset \Pi_k(\frac{2\tau}{c_0 c''})$. Так как $c' \pi_k(x) \leq \rho(x, \Gamma_k)$, то $\bar{\Omega}_k(\tau) \subset \bar{\Pi}_k(\tau/c')$. Так как $\varphi(\rho(x, \Gamma_k)) \asymp \varphi(\pi_k(x))$, то

$$A^q(\tau) \leq C \int_{\bar{\Pi}_k(\tau/c')} \varphi(\pi_k(x)) \left(\int_{\Pi_k(2\tau/c_0 c'')} \frac{\|f(y)\|_B [\varphi(\pi_k(y))]^{\alpha/|a|}}{\rho(x-y)^{|a|-\alpha}} dy \right)^q dx.$$

Нетрудно доказывается, что

$$\rho(\xi' - \nu', \xi'' + \varphi(\xi') - \nu'' - \varphi(\nu')) \asymp \rho(\xi - \nu). \quad (7)$$

Используя эквивалентность $\rho(x)$ и $\eta(x)$, неравенство треугольника

$$\eta(x'' + y'') \leq C_\eta(\eta(x'') + \eta(y'')),$$

где

$$C_\eta = \max\left(1, 2^{\frac{1}{a''_{\min}} - 1}\right),$$

и анизотропное условие Гёльдера для η и $\bar{\varphi}$, получаем

$$\begin{aligned} \rho(\xi - \nu) &\asymp \eta(\xi - \nu) = \eta(\xi' - \nu') + \eta(\xi'' - \nu'') = \\ &= \eta(\xi' - \nu') + \eta(\xi'' - \nu'' + \bar{\varphi}(\xi') - \bar{\varphi}(\nu')) \leq \\ &\leq \eta(\xi' - \nu') + \max\left(1, 2^{\frac{1}{a''_{\min}} - 1}\right) [\eta(\xi'' - \nu'' + \bar{\varphi}(\xi') - \bar{\varphi}(\nu')) + \eta(\bar{\varphi}(\xi') - \bar{\varphi}(\nu'))] \leq \\ &\leq C [\eta(\xi' - \nu') + \eta(\xi'' - \nu'' + \bar{\varphi}(\xi') - \bar{\varphi}(\nu'))] = \\ &= C \eta(\xi' - \nu', \xi'' - \nu'' + \bar{\varphi}(\xi') - \bar{\varphi}(\nu')) \asymp \rho(\xi' - \nu', \xi'' + \bar{\varphi}(\xi') - \nu'' - \bar{\varphi}(\nu')), \end{aligned}$$

где обозначено

$$a''_{\min} = \min_{k+1 \leq i \leq n} a_i.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \Pi_k(\tau) &= \{x \in \Omega_k : \pi_k(x) > \tau\} = \{(x', x'') \in \Omega_k : \eta(x'' - \bar{\varphi}(x')) > \tau\} = \\ &= \{(x', x'') \in \mathbb{R}^n : x' \in \mathbb{R}^k, x'' > \bar{\varphi}(x'), \eta(x'' - \bar{\varphi}(x')) > \tau\} =: [\mathbb{R}^k, \Pi_\varphi(\tau, x')] \end{aligned}$$

и аналогично

$$\bar{\Pi}_k(\tau) =: [\mathbb{R}^k, \bar{\Pi}_\varphi(\tau, x')].$$

Используя эти обозначения, запишем

$$A^q(\tau) \leq C \int_{\mathbb{R}^k} dx' \int_{\overline{\Pi}_\varphi(\tau/c', x')} \varphi(\eta(x'' - \overline{\varphi}(x'))) dx'' \times \\ \times \left(\int_{\mathbb{R}^k} dy' \int_{\Pi_\varphi(2\tau/c_0 c'', y')} \frac{\|f(y)\|_B [\varphi(\eta(y'' - \overline{\varphi}(y')))]^{\alpha/|a|}}{\rho(x - y)^{|a|-\alpha}} dy'' \right)^q =: J.$$

Делая замену

$$x' = \xi', \quad x'' - \overline{\varphi}(x') = \xi''; \quad y' = \nu', \quad y'' - \overline{\varphi}(y') = \nu''$$

и переставляя интегралы, получим

$$J = \int_{\overline{\Theta}(\tau/c')} \varphi(\eta(\xi'')) d\xi'' \int_{\mathbb{R}^k} d\xi' \left(\int_{\Theta(2\tau/c_0 c'')} d\nu'' \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\|f(\nu', \nu'' + \overline{\varphi}(\nu'))\|_B [\varphi(\eta(\nu''))]^{\alpha/|a|}}{[\rho(\xi' - \nu', \xi'' + \overline{\varphi}(\xi') - \nu'' - \overline{\varphi}(\nu'))]^{|a|-\alpha}} d\nu' \right)^q,$$

где обозначено

$$\Theta(\tau) := \{x'' \in \mathbb{R}_{++}^{n-k} : \eta(x'') > \tau\}, \quad \overline{\Theta}(\tau) := \mathbb{R}_{++}^{n-k} \setminus \Theta(\tau).$$

Используя неравенство (7) и неравенство Минковского для области $\mathbb{R}^k \times [\Theta(\frac{2\tau}{c_0 c''}) \times \mathbb{R}^k]$, имеем

$$J \leq \int_{\overline{\Theta}(\tau/c')} \varphi(\eta(\xi'')) d\xi'' \left(\int_{\Theta(2\tau/c_0 c'')} [\varphi(\eta(\nu''))]^{\alpha/|a|} B(\xi'', \nu'') d\nu'' \right)^q,$$

где

$$B(\xi'', \nu'') = \left(\int_{\mathbb{R}^k} d\xi' \left(\int_{\mathbb{R}^k} \|f(\nu', \nu'' + \overline{\varphi}(\nu'))\|_B \rho(\xi - \nu)^{\alpha-|a|} d\nu' \right)^q \right)^{1/q}.$$

Применяя неравенство Юнга для сверток при $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $1/p - 1/q = 1 - 1/r$, $r \geq 1$, и учитывая, что в этом случае по условию теоремы $\alpha = (1/p - 1/q)|a|$ следует, что $r(\alpha - |a|) = -|a|$, получим

$$B(\xi'', \nu'') \leq \left(\int_{\mathbb{R}^k} \|f(\nu', \nu'' + \overline{\varphi}(\nu'))\|_B^p d\nu' \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \rho(\xi', \xi'' - \nu'')^{-|a|} d\xi' \right)^{1/r} =: f_1(\nu'') \rho_1(\xi'' - \nu'').$$

Применяя $\rho(x) \asymp \eta(x)$, находим

$$\rho_1(\xi'') \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^k} \eta(\xi', \xi'')^{-|a|} d\xi' \right)^{1/r}.$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[|\xi_1|^{1/a_1} + \sum_{i=2}^n |\xi_i|^{1/a_i} \right]^{-|a|} \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \left[|\xi_1| + \left(\sum_{i=2}^n |\xi_i|^{1/a_i} \right)^{a_1} \right]^{-|a|/a_1} d\xi_1 = C \left(\sum_{i=2}^n |\xi_i|^{1/a_i} \right)^{-\sum_{i=1}^n a_i}.$$

Применяя это неравенство k раз, получим

$$\rho_1(\xi'' - \nu'') \leq C\rho(\xi'' - \nu'')^{-|a''|} \leq C\eta(\xi'' - \nu'')^{-|a''|}.$$

Функция $\eta(x'')$ удовлетворяет неравенству треугольника

$$\eta(x'' + y'') \leq C_\eta[\eta(x'') + \eta(y'')],$$

откуда при $\eta(\xi'') < \tau/c'$, $\eta(\nu'') \geq \frac{2\tau}{c_0 c''}$ следует

$$\eta(\xi'' - \nu'') \geq \frac{1}{2}\eta(\nu''),$$

если c_0 выбрана таким образом, что

$$c_0 \leq \frac{c'}{c'' C_\eta}.$$

Кроме того, возьмем c_0 так, чтобы $c_0 c'' \leq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} A^q(\tau) &\leq C \int_{\bar{\Theta}(\tau/c')} \varphi(\eta(\xi'')) d\xi'' \left(\int_{\Theta(2\tau/c_0 c'')} [\varphi(\eta(\nu''))]^{\alpha/|a|} [\eta(\xi'' - \nu'')]^{-|a''|/r} f_1(\nu'') d\nu'' \right)^q \leq \\ &\leq C \int_{\bar{\Theta}(\tau/c')} \varphi(\eta(\xi'')) d\xi'' \left(\int_{\Theta(2\tau/c_0 c'')} [\varphi(\eta(\nu''))]^{\alpha/|a|} \eta(\nu'')^{-|a''|/r} f_1(\nu'') d\nu'' \right)^q = \end{aligned}$$

(переходя к сферическим координатам)

$$= C \int_0^{\tau/c'} \varphi(t) t^{|a''|-1} dt \left(\int_{2\tau/c_0 c''}^\infty \varphi(s)^{\alpha/|a|} s^{-\frac{|a''|}{r} + |a''|-1} \left(\int_{S_{++}^\eta} f_1(s^{a''} \zeta'') d\sigma(\zeta'') \right) ds \right)^q.$$

Здесь $S_{++}^\eta = \{x'' \in \mathbb{R}^{n-k} : \eta(x'') = 1, x_i > 0, i = k+1, \dots, n\}$.

Отсюда, поскольку $c_0 c'' \leq 1$, т.е. $\frac{2\tau}{c_0 c''} \geq 2\tau$, находим

$$\begin{aligned} B_{22} &\leq C \left[\int_0^\infty \psi(\tau) \int_0^{\tau/c'} \varphi(t) t^{|a''|-1} dt \left(\int_{2\tau}^\infty \varphi(s)^{\alpha/|a|} s^{-\frac{|a''|}{r} + |a''|-1} \left(\int_{S_{++}^\eta} f_1(s^{a''} \zeta'') d\sigma(\zeta'') \right) ds \right)^q d\tau \right]^{1/q} =: \\ &=: C \left[\int_0^\infty W(\tau) \left(\int_{2\tau}^\infty F(s) U(s) ds \right)^q d\tau \right]^{1/q}. \end{aligned}$$

Неравенство Харди

$$\left(\int_0^\infty W(\tau) \left(\int_{2\tau}^\infty F(s) U(s) ds \right)^q d\tau \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty F(t)^p V(t) dt \right)^{1/p}$$

при $1 < p \leq q < \infty$ характеризуется условием $C \leq c\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} := \sup_{t>0} \left(\int_0^t W(\tau) d\tau \right)^{1/q} \left(\int_{2t}^\infty V^{-\frac{1}{p-1}}(\tau) U^{p'}(\tau) d\tau \right)^{1/p'}.$$

В данном случае

$$W(\tau) = \psi(\tau) \int_0^{\tau/c'} \varphi(s) s^{|a''|-1} ds, \quad U(s) = \varphi(s)^{\alpha/|a|} s^{-\frac{|a''|}{r} + |a''|-1},$$

$$V(s) = \omega(s) s^{|a''|-1}, \quad F(s) = \int_{S_{++}^\eta} f_1(s^{a''} \zeta'') d\sigma(\zeta'').$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t W(\tau) d\tau &= \int_0^{t/c'} \varphi(s) s^{|a''|-1} \left(\int_{sc'}^t \psi(\tau) d\tau \right) ds \leq \int_0^{t/c'} \varphi(s) s^{|a''|-1} u_1(sc') ds = \\ &= C \int_0^t \varphi(c's) u_1(s) s^{|a''|-1} ds. \end{aligned}$$

По условию теоремы

$$\varphi(\pi_k(x)) \asymp \varphi(\rho(x, \Gamma_k)) \quad \forall x \in \Omega_k.$$

Если $\forall s > 0 \exists x \in \Omega_k: \pi_k(x) = s$ и $c' \pi_k(x) = \rho(x, \Gamma_k)$, то

$$\varphi(c's) = \varphi(\rho(x, \Gamma_k)) \leq C \varphi(\pi_k(x)) = C \varphi(s),$$

поэтому

$$\int_0^t W(\tau) d\tau \leq C \int_0^t \varphi(s) u_1(s) s^{|a''|-1} ds = C \int_0^t \omega_1(s) s^{|a''|-1} ds.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \int_{2t}^\infty V^{-\frac{1}{p-1}}(\tau) U^{p'}(s) ds &= \int_{2t}^\infty [\omega(s) s^{|a''|-1}]^{-\frac{1}{p-1}} \left[\varphi(s)^{\alpha/|a|} s^{-\frac{|a''|}{r} + |a''|-1} \right]^{p'} ds = \\ &= \int_{2t}^\infty [\varphi(s)^{-\alpha p/|a|} \omega(s)]^{-\frac{1}{p-1}} s^{-1 - \frac{|a''|p'}{q}} ds. \end{aligned}$$

Условие b) теоремы обеспечивает конечность $\mathcal{A} < \infty$, поэтому, применяя неравенство Харди, получим

$$\begin{aligned} B_{22} &\leq C \left(\int_0^\infty \left(\int_{S_{++}^\eta} f_1(s^{a''} \zeta'') d\sigma(\zeta'') \right)^p s^{|a''|-1} \omega(s) ds \right)^{1/p} = C \left(\int_{\mathbb{R}_{++}^{n-k}} f_1(\nu'')^p \omega(\eta(\nu'')) d\nu'' \right)^{1/p} = \\ &= C \left(\int_{\mathbb{R}_{++}^{n-k}} \int_{\mathbb{R}^k} \|f(\nu', \nu'' + \overline{\varphi}(\nu'))\|_B^p \omega(\eta(\nu'')) d\nu'' d\nu' \right)^{1/p} = C \left(\int_{\Omega_k} \|f(y)\|_B^p \omega(\pi_k(y)) dy \right)^{1/p} \leq \\ &\leq C \left(\int_{\Omega_k} \|f(y)\|_B^p \omega(\rho(y, \Gamma_k)) dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Достаточные условия для общих радиальных весов, обеспечивающие справедливость двух-весовых неравенств сильного и слабого типа, даются в следующих теоремах.

Теорема 6. Пусть B — банахово пространство, Ω_k имеет вид (4) или (5), $1 < p \leq q < \infty$, $\frac{\alpha}{|a|} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Предположим, что весовая пара (ω, ω_1) удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \exists C > 0 \quad \forall t > 0 \quad \left(\sup_{\frac{t}{c_0} < \tau \leq 8c_0 t} \omega_1(\tau) \right)^{p/q} \leq C \inf_{\frac{t}{c_0} < \tau \leq 8c_0 t} \omega(\tau); \\ 2) \quad & \sup_{t > 0} \left(\int_t^\infty \omega_1(\tau) \tau^{-1 - \frac{|a''|q}{p'}} d\tau \right)^{p/q} \left(\int_0^t \omega^{1-p'}(\tau) \tau^{|a''|-1} d\tau \right)^{p-1} < \infty; \\ 3) \quad & \sup_{t > 0} \left(\int_0^t \omega_1(\tau) \tau^{|a''|-1} d\tau \right)^{p/q} \left(\int_t^\infty \omega^{1-p'}(\tau) \tau^{-1 - \frac{|a''|p'}{q}} d\tau \right)^{p-1} < \infty, \end{aligned}$$

где $\omega(\rho(x, \Gamma_k))$ эквивалентно $\omega(\pi_k(x))$, $\omega_1(\rho(x, \Gamma_k))$ эквивалентно $\omega_1(\pi_k(x))$.

Тогда при $1 < p < q < \infty$ для любого $f \in L_{p, \omega(\rho(x, \Gamma_k))}(\Omega_k; B)$ имеет место следующее неравенство:

$$\left(\int_{\Omega_k} \|K_\alpha f(x)\|_B^q \omega_1(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p \omega(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/p}. \quad (8)$$

Если к тому же B — ζ -выпуклая банахова решетка, то неравенство (8) справедливо также при $1 < p = q < \infty$, т.е. $f \rightarrow K_0 f$ ограничено из $L_{p, \omega(\rho(x, \Gamma_k))}(\Omega_k; B)$ в $L_{p, \omega_1(\rho(x, \Gamma_k))}(\Omega_k; B)$.

Доказательство. Представим левую сторону неравенства (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_k} \|K_\alpha f(x)\|_B^q \omega_1(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/q} = \\ & = \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{2^m < \rho(x, \Gamma_k) \leq 2^{m+1}} \|K_\alpha f(x)\|_B^q \omega_1(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/q} \leq \\ & \leq C_1 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{2^m < \rho(x, \Gamma_k) \leq 2^{m+1}} \left\| K_\alpha \left(f \chi_{\{\rho(y, \Gamma_k) \leq \frac{2^{m-1}}{c_0}\}} \right) (x) \right\|_B^q \omega_1(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/q} + \\ & + C_1 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{2^m < \rho(x, \Gamma_k) \leq 2^{m+1}} \left\| K_\alpha \left(f \chi_{\{\frac{2^{m-1}}{c_0} < \rho(y, \Gamma_k) \leq 2^{m+2} c_0\}} \right) (x) \right\|_B^q \omega_1(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/q} + \\ & + C_1 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{2^m < \rho(x, \Gamma_k) \leq 2^{m+1}} \left\| K_\alpha \left(f \chi_{\{\rho(y, \Gamma_k) > 2^{m+2} c_0\}} \right) (x) \right\|_B^q \omega_1(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/q} = \\ & = C_1 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{1m} \right)^{1/q} + C_1 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{2m} \right)^{1/q} + C_1 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{3m} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Оценим $\sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{1m}$:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{1m} \right)^{1/q} &\leq C_2 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{2^m < \rho(x, \Gamma_k) \leq 2^{m+1}} \omega_1(\rho(x, \Gamma_k)) \left(\int_{\rho(y, \Gamma_k) \leq \rho(x, \Gamma_k)} \|f(y)\|_B \rho(y-x)^{\alpha-|a|} dy \right)^q dx \right)^{1/q} \\ &\leq C_3 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\frac{2^m}{c} < \pi_k(x) \leq \frac{2^{m+1}}{c}} \omega_1(\pi_k(x)) \left(\int_{\pi_k(y) \leq \pi_k(x)} \|f(y)\|_B \rho(y-x)^{\alpha-|a|} dy \right)^q dx \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Делая замену $\xi'' = x'' - \bar{\varphi}(x')$, $\nu'' = y'' - \bar{\varphi}(y')$, а затем переобозначая $\xi' = x'$, $\nu' = y'$ и учитывая, что $\rho(\nu' - \xi', \nu'' + \bar{\varphi}(\nu') - \xi'' - \bar{\varphi}(\xi')) \asymp \rho(\nu - \xi)$, получим

$$\begin{aligned} &\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\frac{2^m}{c} < \rho(\xi'') \leq \frac{2^{m+1}}{c}} \omega_1(\rho(\xi'')) \right) \times \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\rho(\nu'') \leq \rho(\xi'')} \|f(\nu', \nu'' + \bar{\varphi}(\nu'))\|_B \rho(\nu' - \xi', \nu'' + \bar{\varphi}(\nu') - \xi'' - \bar{\varphi}(\xi'))^{\alpha-|a|} d\nu'' \right)^q d\nu' \right)^q d\xi' \leq \\ &\leq C_4 \int_{\mathbb{R}_{++}^{n-k}} \omega_1(\rho(\xi'')) \left(\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\rho(\nu'') \leq \rho(\xi'')} \|f(\nu', \nu'' + \bar{\varphi}(\nu'))\|_B \rho(\nu - \xi)^{\alpha-|a|} d\nu'' \right)^q d\nu' \right)^q d\xi' \leq \\ &\leq C_4 \int_{\mathbb{R}_{++}^{n-k}} \omega_1(\rho(\xi'')) d\xi'' \left(\int_{\rho(\nu'') \leq \rho(\xi'')} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \|f(\nu', \nu'' + \bar{\varphi}(\nu'))\|_B \rho(\nu - \xi)^{\alpha-|a|} d\nu' \right)^q d\xi' \right)^{1/q} d\nu'' \right)^q d\xi''. \end{aligned}$$

Далее, поступая так же, как и в теореме 5, можно показать, что

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \|f(\nu', \nu'' + \bar{\varphi}(\nu'))\|_B \rho(\nu - \xi)^{\alpha-|a|} d\nu' \right)^q d\xi' \right)^{1/q} \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^k} \|f(\nu', \nu'' + \bar{\varphi}(\nu'))\|_B^p d\nu' \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \rho(\nu', \nu'' - \xi'')^{(\alpha-|a|)r} d\nu' \right)^{1/r} \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^k} \|f(\nu', \nu'' + \bar{\varphi}(\nu'))\|_B^p d\nu' \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \rho(\nu', \nu'' - \xi'')^{-|a|} d\nu' \right)^{1/r} \leq \\ &\leq C \rho(\nu'' - \xi'')^{-|a''|/r} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \|f(\nu', \nu'' + \bar{\varphi}(\nu'))\|_B^p d\nu' \right)^{1/p} = C \rho(\nu'' - \xi'')^{-|a''|/r} f_1(\nu''), \end{aligned} \tag{9}$$

где $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$.

Так как $\frac{2^m}{c} < \rho(\xi'') \leq \frac{2^{m+1}}{c}$, $\rho(\nu'') \leq \frac{2^{m-1}}{c c_0}$, то $\rho(\nu'') \leq \frac{\rho(\xi'')}{2c_0}$ и $\rho(\nu'' - \xi'') \geq \frac{\rho(\xi'')}{c_0} - \frac{\rho(\xi'')}{2c_0} = \frac{\rho(\xi'')}{2c_0}$.

Поэтому в силу двухвесового варианта неравенства Харди получим

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{\mathbb{R}_{++}^{n-k}} \omega_1(c\rho(\xi'')) \left(\int_{\rho(\nu'') \leq \rho(\xi'')} \rho(\nu'' - \xi'')^{-|a''|/r} f_1(\nu'') d\nu'' \right)^q d\xi'' \right]^{1/q} \leq \\
& \leq \left[\int_{\mathbb{R}_{++}^{n-k}} \omega_1(c\rho(\xi'')) \rho(\xi'')^{-|a''|q/r} \left(\int_{\rho(\nu'') \leq \rho(\xi'')} f_1(\nu'') d\nu'' \right)^q d\xi'' \right]^{1/q} = \\
& = C_5 \left[\int_0^\infty \omega_1(ct) t^{|a''| - \frac{|a''|q}{r} - 1} \left(\int_0^t \tau^{|a''| - 1} \left(\int_{S_{++}^{n-k-1}} f_1(\tau^{a''} \zeta'') d\sigma(\zeta'') \right) d\tau \right)^q dt \right]^{1/q} \leq \\
& \leq C_6 \left[\int_0^\infty \omega(ct) t^{(|a''| - 1)p} t^{(|a''| - 1)(1-p)} \left(\int_{S_{++}^{n-k-1}} f_1(t^{a''} \zeta'') d\sigma(\zeta'') \right)^p dt \right]^{1/p} \leq \\
& \leq C_7 \left[\int_0^\infty \omega(ct) t^{|a''| - 1} \left(\int_{S_{++}^{n-k-1}} f_1^p(t^{a''} \zeta'') d\sigma(\zeta'') \right) dt \right]^{1/p} = C_7 \left(\int_{\mathbb{R}_{++}^{n-k}} f_1^p(\nu'') \omega(c\rho(\nu'')) d\nu'' \right)^{1/p} = \\
& = C_7 \left[\int_{\mathbb{R}_{++}^{n-k}} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \|f(\nu', \nu'' + \overline{\varphi}(\nu'))\|_B^p d\nu' \right) \omega(c\rho(\nu'')) d\nu'' \right]^{1/p} \leq \\
& \leq C_7 \left[\int_{\{x: x' \in \mathbb{R}^k, x'' > \overline{\varphi}(x')\}} \|f(x)\|_B^p \omega(c\pi_k(x)) dx \right]^{1/p} \leq C_8 \left(\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p \omega(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Теперь оценим $\sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{3m}$:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{3m} \right)^{1/q} & \leq C_2 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{2^m < \rho(x, \Gamma_k) \leq 2^{m+1}} \omega_1(\rho(x, \Gamma_k)) \left(\int_{\rho(y, \Gamma_k) \geq \rho(x, \Gamma_k)} \|f(y)\|_B \rho(y-x)^{\alpha-|a|} dy \right)^q dx \right)^{1/q} = \\
& = C_2 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\frac{2^m}{c} < \pi_k(x) \leq \frac{2^{m+1}}{c}} \omega_1(c\pi_k(x)) \left(\int_{\pi_k(y) \geq \pi_k(x)} \|f(y)\|_B \rho(y-x)^{\alpha-|a|} dy \right)^q dx \right)^{1/q} = \\
& = C_2 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\frac{2^m}{c} < \rho(x'' - \overline{\varphi}(x')) \leq \frac{2^{m+1}}{c}} \omega_1(c\rho(x'' - \overline{\varphi}(x'))) \times \right. \\
& \quad \left. \times \left(\int_{\rho(y'' - \overline{\varphi}(y')) \geq \rho(x'' - \overline{\varphi}(x'))} \|f(y)\|_B \rho(y-x)^{\alpha-|a|} dy \right)^q dx \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Делая замену $\xi'' = x'' - \overline{\varphi}(x')$, $\nu'' = y'' - \overline{\varphi}(y')$, а затем переобозначая $\xi' = x'$, $\nu' = y'$ и учитывая, что $\rho(\nu' - \xi', \nu'' + \overline{\varphi}(\nu') - \xi'' - \overline{\varphi}(\xi')) \asymp \rho(\nu - \xi)$, получим

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\frac{2^m}{c} < \rho(\xi'') \leq \frac{2^{m+1}}{c}} \omega_1(c\rho(\xi'')) \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\rho(\nu'') \leq \rho(\xi'')} \|f(\nu', \nu'' + \overline{\varphi}(\nu'))\|_B \rho(\nu' - \xi', \nu'' + \overline{\varphi}(\nu') - \xi'' - \overline{\varphi}(\xi'))^{\alpha - |a|} d\nu'' \right) d\nu' \right)^q d\xi' \right)^{1/q} d\xi'' \leq \\ & \leq C_9 \left[\int_{\mathbb{R}_{++}^{n-k}} \omega_1(c\rho(\xi'')) d\xi'' \left(\int_{\rho(\nu'') \leq \rho(\xi'')} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \|f(\nu', \nu'' + \overline{\varphi}(\nu'))\|_B \rho(\nu - \xi)^{\alpha - |a|} d\nu' \right)^q d\xi' \right)^{1/q} d\nu'' \right)^q d\xi'' \right]^{1/q}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{2^m}{c} < \rho(\xi'') \leq \frac{2^{m+1}}{c}$, $\rho(\nu'') \geq \frac{c_0 2^{m+2}}{c}$, то $\rho(\xi'') \leq \frac{\rho(\nu'')}{2c_0}$ и $\rho(\nu'' - \xi'') \geq \frac{\rho(\nu'')}{c_0} - \rho(\xi'') = \frac{\rho(\nu'')}{2c_0}$. Поэтому в силу двухвесового варианта неравенства Харди получим

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_{++}^{n-k}} \omega_1(\rho(\xi'')) \left(\int_{\rho(\nu'') \geq \rho(\xi'')} \rho(\nu'' - \xi'')^{-|a''|/r} f_1(\nu'') d\nu'' \right)^q d\xi'' \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}_{++}^{n-k}} \omega_1(\rho(\xi'')) \left(\int_{\rho(\nu'') \leq \rho(\xi'')} f_1(\nu'') \rho(\nu'')^{-|a''|/r} d\nu'' \right)^q d\xi'' = \\ & = C_{10} \int_{\mathbb{R}_{++}^{n-k}} \omega_1(c\rho(\xi'')) \left(\int_{\rho(\xi'')}^{\infty} \tau^{|a''|-1-\frac{|a''|}{r}} \left(\int_{S_{++}^{n-k-1}} f_1(\tau^{a''} \zeta'') d\sigma(\zeta'') \right) d\tau \right)^q dt = \\ & = C_{11} \int_0^{\infty} \omega_1(t) t^{|a''|-1} \left(\int_t^{\infty} \tau^{\alpha-1} \left(\int_{S_{++}^{n-k-1}} f_1(\tau^{a''} \zeta'') d\sigma(\zeta'') \right) d\tau \right)^q dt \leq \\ & \leq C_{12} \left(\int_0^{\infty} \omega(ct) t^{p-1+\frac{|a''|p}{q}+(\alpha-1)p} \left(\int_{S_{++}^{n-k-1}} f_1(t^{a''} \zeta'') d\sigma(\zeta'') \right)^p dt \right)^{q/p} \leq \\ & \leq C_{13} \left(\int_0^{\infty} \omega(ct) t^{|a''|-1} \left(\int_{S_{++}^{n-k-1}} f_1^p(t^{a''} \zeta'') d\sigma(\zeta'') \right) dt \right)^{q/p} = C_{13} \left(\int_{\mathbb{R}_{++}^{n-k}} f_1^p(\nu'') \omega(c\rho(\nu'')) d\nu'' \right)^{q/p} = \\ & = C_{13} \left[\int_{\mathbb{R}_{++}^{n-k}} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \|f(\nu', \nu'' + \overline{\varphi}(\nu'))\|_B^p d\nu' \right) \omega(c\rho(\nu'')) d\nu'' \right]^{q/p} = \\ & = C_{13} \left[\int_{\{x: x' \in \mathbb{R}^k, x'' > \overline{\varphi}(x')\}} \|f(x)\|_B^p \omega(c\pi_k(x)) dx \right]^{q/p} = C_{13} \left(\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p \omega(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{q/p}. \end{aligned}$$

Используя сильную (p, q) -оценку для оператора K_α , имеем

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{2m} \right)^{1/q} &\leq \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sup_{\frac{2^{m-1}}{c_0} < \rho(x, \Gamma_k) \leq 2^{m+2} c_0} \omega_1(\rho(x, \Gamma_k)) \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \int_{\Omega_k} \left\| K_\alpha \left(f \chi_{\left\{ \frac{2^{m-1}}{c_0} < \rho(x, \Gamma_k) \leq 2^{m+2} c_0 \right\}} \right) (x) \right\|_B^q dx \right)^{1/q} \leq \\
 &\leq C_{14} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sup_{\frac{2^{m-1}}{c_0} < \rho(x, \Gamma_k) \leq 2^{m+2} c_0} \omega_1(\rho(x, \Gamma_k)) \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\int_{\Omega_k} \left\| f \chi_{\left\{ \frac{2^{m-1}}{c_0} < \rho(x, \Gamma_k) \leq 2^{m+2} c_0 \right\}} (x) \right\|_B^p dx \right)^{q/p} \right)^{1/q} \leq \\
 &\leq C_{15} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\frac{2^{m-1}}{c_0} < \rho(x, \Gamma_k) \leq 2^{m+2} c_0} \|f(x)\|_B^p \omega(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{q/p} \right)^{1/q} \leq \\
 &\leq C_{16} \left(\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B^p \omega(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{1/p}.
 \end{aligned}$$

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 7. Пусть B — банахово пространство, Ω_k имеет вид (4) или (5), $0 < \alpha < |a|$, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{|a|}$, $\omega(\rho(x, \Gamma_k))$ эквивалентно $\omega(\pi_k(x))$, $\omega_1(\rho(x, \Gamma_k))$ эквивалентно $\omega_1(\pi_k(x))$ и выполняются следующие условия:

- 1) $\exists C > 0 \quad \forall t > 0 \quad \left(\sup_{\frac{t}{c_0} < \tau \leq 8c_0 t} \omega_1(\tau) \right)^{1/q} \leq C \inf_{\frac{t}{c_0} < \tau \leq 8c_0 t} \omega(\tau);$
- 2) $\sup_{t > 0} \left(\int_t^\infty \frac{\omega_1(\tau)}{\tau} d\tau \right)^{1/q} \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in (0, 2t)} \frac{1}{\omega(\tau)} < \infty;$
- 3) $\sup_{t > 0} \left(\int_0^t \omega_1(\tau) \tau^{|a''|-1} d\tau \right)^{1/q} \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in (t/2, \infty)} \frac{1}{\omega(\tau) \tau^{|a''|/q}} < \infty.$

Тогда имеет место неравенство

$$\int_{\{x \in \Omega_k : \|K_\alpha f(x)\|_B > \lambda\}} \omega_1(\rho(x, \Gamma_k)) dx \leq C \left(\frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_k} \|f(x)\|_B \omega(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^q. \quad (10)$$

Если к тому же B — ζ -выпуклая банахова решетка, то неравенство (10) справедливо при $q = 1$.

Определим весовое пространство Соболева $W_{p,\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_n}^{l_1,\dots,l_n}(\mathbb{R}^n; B)$, $l_i \geq 0$ — целые, $1 \leq p \leq \infty$, как совокупность сильно измеримых B -значных функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, имеющих обобщенные производные $D_i^{l_i} f$ с конечной нормой

$$\|f, W_{p,\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_n}^{l_1,\dots,l_n}(\mathbb{R}^n; B)\| = \|f\|_{L_{p,\omega_0}(\mathbb{R}^n; B)} + \sum_{i=1}^n \|D_i^{l_i} f\|_{L_{p,\omega_i}(\mathbb{R}^n; B)}.$$

Приведем интегральное представление функции через ее обобщенные производные из работы [18]:

$$f(x) = f_{h^a}(x) + \sum_{i=1}^n \int_{\varepsilon}^h \vartheta^{-1-|a|+l_i a_i} d\vartheta \int_{\mathbb{R}^n} L_i(\vartheta^{-a} y) D_i^{l_i} f(x+y) dy, \quad (11)$$

где $f_{h^a}(x) = h^{-|a|} \int_{\mathbb{R}^n} L_0(y h^{-a}) f(x+y) dy$, L_j , $j = 1, \dots, n$, — некоторые бесконечно дифференцируемые финитные функции, сосредоточенные в области

$$D = \{y: 0 < c_i^{a_i} < y_i < b_i^{a_i}, i = 1, \dots, n\}$$

и обладающие соответственно свойствами

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_0(y) dy = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} L_i(y) dy = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Применяя теоремы 2 и 3 к (11), получаем (см., например, [1]) следующую теорему.

Теорема 8. Пусть B — банахово пространство, $\frac{1}{a} = l \in \mathbb{N}^n$, $1 < p < \infty$, $\varkappa = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{l_i} \leq 1$, $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{l_i} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} = 1$, $u(t)$, $u_j(t)$ — монотонные положительные функции, $\varphi(\rho(x)) \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega = u\varphi$ и $\omega_j = u_j\varphi$, $j = 0, 1, \dots, n$. Предположим, что весовые пары (ω_j, ω) , $j = 0, 1, \dots, n$, удовлетворяют одному из следующих условий:

$$a_1) \quad \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \omega_j(\tau) \tau^{-1-|a|(p-1)} d\tau \right) \left(\int_0^{t/2} \left(\varphi^{-\alpha p/|a|}(\tau) \omega(\tau) \right)^{1-p'} \tau^{|a|-1} d\tau \right)^{p-1} < \infty,$$

где u и u_j — неубывающие функции;

$$b_1) \quad \sup_{t>0} \left(\int_0^{t/2} \omega_j(\tau) \tau^{|a|-1} d\tau \right) \left(\int_t^\infty \left(\varphi^{-\alpha p/|a|}(\tau) \omega(\tau) \right)^{1-p'} \tau^{-1-|a|(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty,$$

где u и u_j — невозрастающие функции.

Тогда при $\varkappa < 1$ имеет место непрерывное вложение

$$D^\alpha W_{p,\omega_0(\rho(x)),\dots,\omega_n(\rho(x))}^{l_1,\dots,l_n}(\mathbb{R}^n; B) \hookrightarrow L_{p,\omega(\rho(x))}(\mathbb{R}^n; B).$$

Если к тому же B — ζ -выпуклая банахова решетка, то вложение справедливо также при $1 < p = q < \infty$, $\varkappa = 1$.

Отметим, что теорема 8 при $\varphi = 1$ доказана в [19].

С помощью теорем 7 и 8 доказывается следующая

Теорема 9. Пусть B — банахово пространство, Ω_k имеет вид (4) или (5), $\frac{1}{a} = l \in \mathbb{N}^n$, $1 < p \leq q < \infty$, $\varkappa = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{l_i} \leq 1$, $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{l_i} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} = 1$, весовые пары (ω_j, ω) , $j = 0, 1, \dots, n$, удовлетворяют условиям теоремы 7 или теоремы 8.

Тогда при $\varkappa < 1$ имеет место непрерывное вложение

$$D^\alpha W_{p, \omega_0(\rho(x, \Gamma_k)), \dots, \omega_n(\rho(x, \Gamma_k))}^{l_1, \dots, l_n}(\Omega_k; B) \hookrightarrow L_{q, \omega(\rho(x, \Gamma_k))}(\Omega_k; B).$$

При этом

$$\|D^\alpha f\|_{L_{q, \omega}(\Omega_k; B)} \leq C \|f, W_{p, \omega_0, \dots, \omega_n}^{l_1, \dots, l_n}(\Omega_k; B)\|,$$

где постоянная C не зависит от f .

Если к тому же B — ζ -выпуклая банахова решетка, то вложение справедливо также при $1 < p = q < \infty$, $\varkappa = 1$.

Отметим, что теорема 9 при $\omega_i(t) = t^{\beta_i}$, $i = 0, 1, \dots, n$, для числовых функций доказана в работе Ю.С. Никольского [2], а также при $k = n - 1$, $\varphi = 1$ для числовых функций и при $k = n - 1$, $\varphi = 1$, $\Omega_{n-1} = \mathbb{R}_+^n$ для банаховозначных функций получена в работах [1, 19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гулиев В.С. Двухвесовые неравенства для интегральных операторов в L_p -пространствах и их приложения // Тр. МИАН. 1993. Т. 204. С. 113–136.
2. Никольский Ю.С. Теоремы вложения весовых анизотропных пространств дифференцируемых функций // Тр. МИАН. 1992. Т. 201. С. 302–323.
3. Кочарли А.Ф. Некоторые весовые теоремы вложения в области с гладкой границей // Тр. МИАН. 1974. Т. 131. С. 128–146.
4. Успенский С.В. О смешанных производных функций, суммируемых с весом // Диф. уравнения. 1967. Т. 3, № 1. С. 139–154.
5. Бесов О.В. Весовые оценки смешанных производных в области // Тр. МИАН. 1980. Т. 156. С. 16–21.
6. Лизоркин П.И. Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p -нормах // Тр. МИАН. 1980. Т. 156. С. 130–142.
7. Перепелкин В.Г. Интегральные представления функций, принадлежащих весовым классам С.Л. Соболева в областях, и некоторые их приложения. I, II // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 1. С. 119–140; № 2. С. 318–330.
8. Burkholder D.L. Martingale transforms and the geometry of Banach spaces // Lect. Notes Math. 1981. V. 860. P. 35–50.
9. Kokilashvili V.M., Meskhi A. Two-weight inequalities for singular integrals defined on homogeneous groups // Proc. Razmadze Math. Inst. 1997. V. 112. P. 57–90.
10. Meskhi A. Two-weight inequalities for potentials defined on homogeneous groups // Proc. Razmadze Math. Inst. 1997. V. 112. P. 90–111.
11. Coifman R.R., Fefferman C. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals // Stud. math. 1974. V. 51. P. 241–250.
12. Рошман И.М., Солонников В.А. Оценки в весовых нормах L_p для сингулярных интегралов с анизотропными ядрами // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1985. Т. 147. С. 124–137.
13. Rubio de Francia J.L., Ruiz F.J., Torrea J.L. Calderon–Zygmund theory for operator-valued kernels // Adv. Math. 1986. V. 62, N 1. P. 7–48.
14. Muckenhoupt B., Wheeden R.L. Weighted norm inequalities for fractional integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 192. P. 261–274.
15. Кокшашвили В.М. Максимальные функции и сингулярные интегралы в весовых функциональных пространствах. Тбилиси: Мецниереба, 1985. 114 с. (Тр. Тбил. мат. ин-та им. А.М. Размадзе; Т. 80).
16. Гусейнов Е.Г. Сингулярные интегралы в пространствах функций, суммируемых с монотонным весом // Мат. сб. 1987. Т. 132, № 1. С. 28–44.
17. Алиев И.А., Гаджиев А.Д. Весовые оценки многомерных сингулярных интегралов, порожденных оператором обобщенного сдвига // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 9. С. 45–66.
18. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
19. Гулиев В.С. Теоремы вложения для весовых пространств Соболева B -значных функций // Докл. РАН. 1994. Т. 338, № 4. С. 440–443.